



PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

SIMULAÇÃO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM PROCESSOS DE SOLDAGEM 3D UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Por,
Rafael Marques Campos

Brasília, 26 de Outubro de 2012

UNIVERSIDADE DE BRASILIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECANICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

SIMULAÇÃO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM PROCESSOS DE SOLDAGEM 3D UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

POR,

Rafael Marques Campos

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico.

Banca Examinadora

Prof. Guilherme Caribé de Carvalho, UnB/ ENM
(Orientador)

Prof. Éder Lima de Albuquerque, UnB/ ENM
(Co-orientador)

Prof. Taygoara Felamingo de Oliveira, UnB/ ENM

Brasília, 26 de Outubro de 2012

RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um programa com a finalidade de simular numericamente a transferência de calor no processo de prototipagem rápida por deposição de metal em camadas sucessivas utilizando soldagem a arco, também chamada de soldagem 3D (3D Welding). Com o objetivo de conseguir prever o comportamento do material depositado, a transferência de calor é analisada. Um modelo numérico que utiliza o método dos elementos de contorno é desenvolvido, a partir do qual se torna possível simular determinadas condições. Ao final valida-se o código comparando os resultados numéricos com soluções analíticas simples desenvolvidas ou obtidas pela literatura.

ABSTRACT

This work presents the development of a program in order to numerically simulate the heat transfer during the process of rapid prototyping by metal deposition in successive layers using arc welding, also called, 3D Welding. With the purpose of predicting the behavior of the deposited material, the heat transfer is analyzed. A numerical model using the boundary elements method is developed, from which it becomes possible to simulate certain conditions. At the end the code is validated by comparing numerical results with simple analytical solutions developed or obtained in the literature.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	MOTIVAÇÃO	1
1.2	OBJETIVOS	3
1.3	COMPOSIÇÃO E ESTRUTURA DO TRABALHO	3
2	EMBASAMENTO MATEMÁTICO.....	4
2.1	TEOREMA DE GAUSS-GREEN.....	4
2.2	TEOREMA DA DIVERGÊNCIA	6
2.3	A SEGUNDA IDENTIDADE DE GREEN	6
2.4	FUNÇÃO DELTA DE DIRAC	7
2.5	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA – QUADRATURA DE GAUSS	9
2.6	MÉTODO DA INTEGRAÇÃO RADIAL.....	9
3	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	11
3.1	CONCEITOS BÁSICOS.....	11
3.2	INTRODUÇÃO À TRANSFERÊNCIA DE CALOR.....	11
3.2.1	<i>Equação geral da condução de calor</i>	<i>11</i>
3.2.2	<i>Condições de contorno.....</i>	<i>14</i>
3.3	CASO BIDIMENSIONAL	15
3.3.1	<i>Solução fundamental para a condução de calor.....</i>	<i>15</i>
3.3.2	<i>A equação integral para a condução de calor.</i>	<i>18</i>
3.3.3	<i>Elementos de contorno</i>	<i>19</i>
3.3.4	<i>Integração das matrizes [G] e [H]</i>	<i>21</i>
3.4	CASO TRIDIMENSIONAL	26
3.4.1	<i>Solução fundamental</i>	<i>26</i>
3.4.2	<i>Equação integral</i>	<i>28</i>
3.4.3	<i>Elementos de contorno tridimensionais.....</i>	<i>28</i>
3.5	O MÉTODO DA RECIPROCIDADE DUAL.....	32
3.5.1	<i>Vetor α</i>	<i>33</i>
3.5.2	<i>Funções de aproximação.....</i>	<i>34</i>
3.5.3	<i>A equação da difusão.....</i>	<i>35</i>
4	LISTAGEM DOS CÓDIGOS	38
4.1	CÓDIGO PERMANENTE (ANEXO II).....	38
4.1.1	<i>Input de dados</i>	<i>38</i>
4.1.2	<i>Monta G e H. (ANEXO III)</i>	<i>39</i>

4.1.3	<i>Solver (ANEXO IV)</i>	40
4.2	CÓDIGO TRANSIENTE (ANEXO VI)	41
4.2.1	<i>Input de dados</i>	41
4.2.2	<i>Monta G e H (ANEXO VII)</i>	42
4.2.3	<i>Monta S DRM (ANEXO VIII)</i>	42
4.2.4	<i>Solver (ANEXO IX e ANEXO X)</i>	42
5	IMPLEMENTAÇÃO	44
5.1	VALIDAÇÃO DO PROGRAMA 2D	44
5.2	VALIDAÇÃO DAS MALHAS 3D	45
5.3	IMPLEMENTAÇÃO PROGRAMA 3D	50
5.3.1	<i>Condição de contorno de convecção</i>	50
5.3.2	<i>Condição de contorno de radiação</i>	51
5.3.3	<i>Fontes concentradas de calor</i>	54
5.4	PROGRAMA TRANSIENTE.....	55
6	CONCLUSÕES	58
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	59
	ANEXOS	61
	ANEXO I: PROVA DOS FATORES GEOMÉTRICOS PARA UM CONTORNO SUAVE	62
	ANEXO II: PROGRAMA <i>POT_CONST3D.M</i>	64
	ANEXO III: PROGRAMA <i>POT_CONST3D.M – MONTA_GEH.M</i>	65
	ANEXO IV: PROGRAMA <i>POT_CONST3D.M – SOLVER.M</i>	67
	ANEXO V: PROGRAMA <i>POT_CONST3D.M – F_APLICA_CDC.M</i>	68
	ANEXO VI: PROGRAMA <i>DIF_CONST3D.M</i>	69
	ANEXO VII: PROGRAMA <i>DIF_CONST3D.M – MONTA_GEH2.M</i>	70
	ANEXO VIII: PROGRAMA <i>DIF_CONST3D.M – MONTA_S_DRM.M</i>	72
	ANEXO IX: PROGRAMA <i>DIF_CONST3D.M – GERA_X_INI.M</i>	74
	ANEXO X: PROGRAMA <i>DIF_CONST3D.M – INTEGRA_TEMPO.M</i>	75

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1. PRINCÍPIOS DO PROCESSO DE IMPRESSÃO 3D [9]	1
FIGURA 2. PROCESSO HÍBRIDO, SOLDAGEM E FRESAGEM [9]	2
FIGURA 3. PEÇAS OBTIDAS COM SOLDAGEM 3D COM UM PROCESSO SEMIAUTOMÁTICO [8].....	2
FIGURA 4. ÁREA PLANA USADA NA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE GAUSS-GREEN [6]	4
FIGURA 5. VOLUME USADO NA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3D DE GAUSS-GREEN [6]	5
FIGURA 6. REPRESENTAÇÃO DE UMA CARGA CONCENTRADA [6]	7
FIGURA 7. FUNÇÃO PULSO RETANGULAR UNITÁRIO [2]	8
FIGURA 8. VISUALIZAÇÃO DO MÉTODO DA INTEGRAÇÃO RADIAL [1]	10
FIGURA 9. CONDUÇÃO DE UNIDIRECIONAL EM UMA UNIDADE DE VOLUME DE UMA PAREDE EXTENSA [4].....	12
FIGURA 10. EXEMPLO DE FATORES DE FORMA EM DIFERENTES SUPERFÍCIES [4]	14
FIGURA 11. FATOR DE FORMA EM ELEMENTOS INFINITESIMAIS [4].....	15
FIGURA 12. ILUSTRAÇÃO USADA PARA O CÁLCULO DO FLUXO DE CALOR DEVIDO A UM PONTO FONTE [6]	16
FIGURA 13. SUBDIVISÃO DA SUPERFÍCIE REAL S [1]	19
FIGURA 14. INTERPOLAÇÃO DA SUPERFÍCIE REAL COM ELEMENTOS LINEARES [1].....	20
FIGURA 15. EXEMPLO DE UM PROBLEMA BEM COLOCADO [1].....	21
FIGURA 16. SISTEMAS DE REFERÊNCIA LOCAL E GLOBAL, RESPECTIVAMENTE [1].....	22
FIGURA 17. DIREÇÃO DA NUMERAÇÃO DOS ELEMENTOS [2]	24
FIGURA 18. VETORES \mathbf{R} E \mathbf{n} QUANDO O PONTO FONTE PERTENCE AO ELEMENTO.....	25
FIGURA 19. SUPERFÍCIE ESFÉRICA PARA O CÁLCULO DO FLUXO DE CALOR PARA UM PONTO FONTE [6]	26
FIGURA 20. REPRESENTAÇÃO DO ELEMENTO INFINITESIMAL ESFÉRICO [6]	27
FIGURA 21. MODELAGEM DA SUPERFÍCIE COM DIFERENTES ELEMENTOS [6]	28
FIGURA 22. ELEMENTO QUADRILATERAL DE QUATRO NÓS [6]	29
FIGURA 23. FLUXOGRAMA DO PROGRAMA <i>POT_CONST3D.M</i>	38
FIGURA 24. IMAGEM DO PROGRAMA <i>VFAC.M</i>	40
FIGURA 25. FLUXOGRAMA DO PROGRAMA <i>POT_CONST3D.M</i>	41
FIGURA 26. GEOMETRIA E CONDIÇÕES DE CONTORNO DO PROBLEMA	44
FIGURA 27. DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA OBTIDA NA SIMULAÇÃO.....	45
FIGURA 28. (A) MALHA DE UM CILINDRO VAZADO. (B) MALHA DE UMA PAREDE RETA	46
FIGURA 29. DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA EM UM CILINDRO OBTIDA PARA O FLUXO DE CALOR AXIAL	47
FIGURA 30. DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA EM UM CUBO OBTIDA PARA O FLUXO DE CALOR UNIDIRECIONAL	48
FIGURA 31. DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA EM UM CILINDRO OBTIDA PARA O FLUXO DE CALOR RADIAL	49
FIGURA 32. DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA EM UM CUBO COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE CONVECÇÃO	51
FIGURA 33. GEOMETRIA E CONDIÇÕES DE CONTORNO DO PROBLEMA	52
FIGURA 34. DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA EM UM CUBO COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE RADIAÇÃO.....	53
FIGURA 35. DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA EM UM CUBO COM UM PONTO FONTE CENTRALIZADO NA FACE SUPERIOR	55

FIGURA 36. VARIAÇÃO DA TEMPERATURA AO LONGO DO TEMPO NO PROGRAMA <i>DIFUSAO.M</i>	56
FIGURA 37. VARIAÇÃO DA TEMPERATURA AO LONGO DO TEMPO NO PROGRAMA <i>DIF_CONST3D.M</i>	56
FIGURA 38. HIPERESFERA UTILIZADA PARA O CÁLCULO DOS FATORES GEOMÉTRICOS [6]	62

LISTA DE TABELAS

TABELA 1. VANTAGENS E DESVANTAGENS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	11
TABELA 2. COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DA SIMULAÇÃO 2D OBTIDOS COM OS PRESENTES NA REFERÊNCIA [7]	45
TABELA 3. COMPARAÇÃO ENTRE A SOLUÇÃO ANALÍTICA E A SOLUÇÃO NUMÉRICA DO FLUXO DE CALOR AXIAL	47
TABELA 4. COMPARAÇÃO ENTRE A SOLUÇÃO ANALÍTICA E A SOLUÇÃO NUMÉRICA DO FLUXO DE CALOR RADIAL.....	49
TABELA 5. COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DA SIMULAÇÃO 3D OBTIDOS COM OS PRESENTES NA REFERÊNCIA [7]	51
TABELA 6. COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS DA SIMULAÇÃO 3D COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE RADIAÇÃO	53

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

A	Área	$[m^2]$
c	Fator geométrico	
d	Ponto fonte	
\vec{e}_i	Vetor unitário na direção x	
h	Coeficiente de transferência de calor por convecção	$[W/m^2.K]$
k	Condutividade térmica	$[W/m.K]$
\vec{n}	Vetor normal	
N	Função de forma	
\dot{q}	Fluxo de calor por unidade de área	$[W/m^2]$
r	Raio do círculo	$[m]$
S	Superfície real do objeto	
s	Seção infinitesimal da superfície real	
\vec{t}	Vetor tangente	
T	Temperatura	$[^{\circ}C]$
V	Volume	$[m^3]$
w	Peso de Gauss	

Símbolos Gregos

Γ	Superfície interpolada	
δ	Função delta de Dirac	
ρ	Elemento infinitesimal do raio	
Δ	Variação entre duas grandezas similares	
ε	Emissividade	
η	Coordenada do sistema de referência local	
θ	Ângulo	$[^{\circ}]$
ξ	Coordenada do sistema de referência local	
$\vec{\nabla}$	Operador gradiente	
∇^2	Operador Laplaciano	
∂	Derivada parcial	

Subscritos

∞	infinito
amb	ambiente

<i>elem</i>	elemento
<i>ger</i>	gerado

Sobrescritos

(E)	Elemento
\rightarrow	Grandeza vetorial
$*$	Solução fundamental
$-$	Valor conhecido
\bullet	Variação temporal
\wedge	Solução particular
\sim	Solução homogênea

Siglas

CAD	Computer Aided Design
CDIF	Contour Double Integral Formula
FDM	Modelagem por Deposição Fundida
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MIG	Metal Inert Gas
MAG	Metal Active Gas

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

Ultimamente, os processos de prototipagem rápida (em inglês, Rapid Prototyping) vem ganhando força na indústria. Isso devido à contínua exigência de minimizar gastos financeiros e de tempo na fabricação de protótipos.

A prototipagem rápida, também conhecida como impressão 3D, utiliza a deposição de material em camadas sucessivas. Já os processos convencionais (como a usinagem, fresagem, desbaste) trabalham com a remoção de material. Comparativamente, a construção camada a camada dá maior liberdade na confecção da peça, sendo esta a vantagem que torna o método tão atrativo. A Figura 1 ilustra a construção de uma peça a partir desse processo.

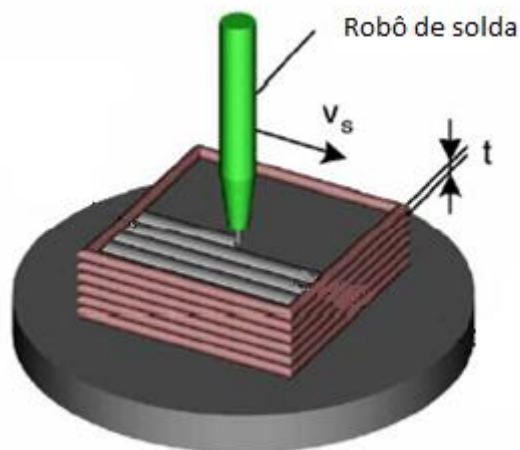


Figura 1. Princípios do processo de impressão 3D [1]

A impressão 3D conta com diversos processos, cada um usando como matéria prima um material específico (madeira, polímeros, cerâmicos e metais). Neste trabalho será desenvolvido o modelo numérico para o cálculo da transferência de calor no processo de deposição de metal em camadas sucessivas (Shape Metal Deposition) por meio de um robô de solda Mig/Mag. Também conhecido como soldagem 3D (3D Welding). Esse processo nada mais é que a variação do processo de modelagem por deposição fundida (FDM).

Como o processo de deposição de material também tem seus problemas, métodos híbridos estão sendo desenvolvidos. Um desses métodos que vale ser ressaltado é a soldagem e fresagem (Welding and Milling) [1]. Como ilustra a Fig. 2, após a deposição de uma camada, a superfície é fresada para uma espessura especificada para que a deposição continue.

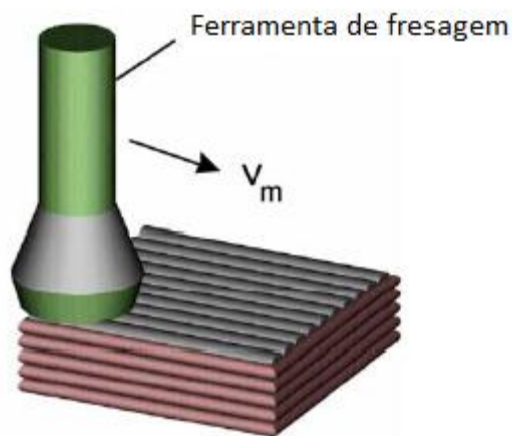


Figura 2. Processo híbrido, soldagem e fresagem [1]

Na soldagem 3D, o processo começa com a criação de um modelo sólido em CAD (Computer Aided Design). Então é usado um software para traçar o percurso da tocha, o modelo é dividido em camadas sucessivas, traçando um caminho contínuo que será percorrido pelo robô de solda.

O problema focado nesse trabalho é a determinação do avanço ortogonal ao plano. Já que o metal de solda sai a altas temperaturas e é um bom acumulador de calor, o tempo de resfriamento da poça de solda aumenta gradativamente, com isso a altura esperada de cada camada varia. A Figura 3 mostra peças confeccionadas segundo esse método, porém com o uso de um avanço manual no eixo z.



Figura 3. Peças obtidas com soldagem 3D com um processo semiautomático [2]

O acúmulo de calor gera, por consequência, variações das características do sólido. Por isso é necessário um estudo mais aprofundado da transferência de calor com objetivo de controlar as variáveis pertinentes para melhorar a qualidade do protótipo.

1.2 OBJETIVOS

O intuito deste trabalho é criar um programa, através do software MatLab, capaz de simular numericamente problemas de transferência de calor. O método no qual a pesquisa se baseia é o método dos elementos de contorno (MEC).

De maneira esquemática, os objetivos são:

1. Realizar uma revisão bibliográfica sobre o método dos elementos de contorno;
2. Estudar os fundamentos da simulação bidimensional do MEC;
3. Criar um programa capaz de gerar malhas tridimensionais simples;
4. Implementar em um programa 3D simples condições de contorno mais complexas;
5. Validação do código usando soluções analíticas e soluções encontradas na literatura;
6. Adicionar um modelo transiente de transferência de calor;
7. Simular um processo de soldagem 3D a partir do programa desenvolvido, aplicando as devidas considerações e aproximações para se aproximar de uma modelagem real;
8. Analisar a influência das variáveis da soldagem no acúmulo de calor, e como este acúmulo influencia na impressão e nas propriedades da peça.

1.3 COMPOSIÇÃO E ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho está dividido em 5 capítulos principais:

1. Introdução: com o objetivo de dar uma visão geral do problema, são apresentadas a motivação e os objetivos a serem cumpridos ao final do trabalho.
2. Embasamento matemático: são feitas revisões sobre funções matemáticas importantes ao método e cujo uso é recorrente ao longo do trabalho.
3. Método dos elementos de contorno: primeiramente mostrar quais as vantagens e desvantagens do método. Em seguida são apresentadas as formulações bidimensional e tridimensional. Mesmo a simulação final sendo 3D, a modelagem 2D ajuda na compreensão e programas 2D são usados para validar as implementações.
4. Implementação: primeiro comprova-se a validade do programa bidimensional. Em seguida são validadas as malhas tridimensionais e as condições de contorno implementadas no programa.
5. Conclusões: com base no que foi desenvolvido, este capítulo tem como objetivo gerar perspectivas futuras para dar sequência ao trabalho.

2 EMBASAMENTO MATEMÁTICO

2.1 TEOREMA DE GAUSS-GREEN

O teorema de Gauss-Green é uma identidade fundamental que reduz em um a ordem de uma equação integral, ou seja, integrais de área se tornam integrais de contorno e integrais de volume se transformam integrais de superfície [3]. Considere a área determinada pela função f com relação a x mostrada na Fig. 4. A integral de área pode ser escrita como uma integral dupla, uma em relação a x e a outra com relação a y .

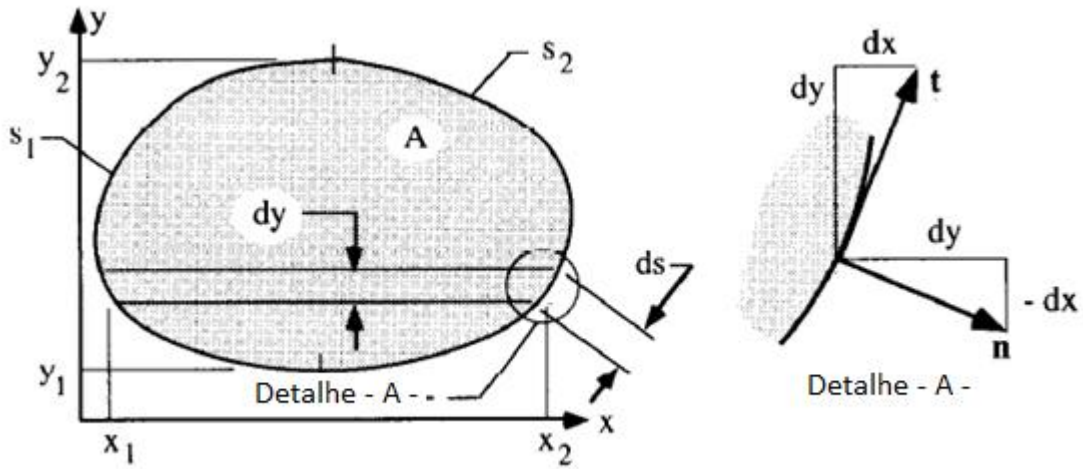


Figura 4. Área plana usada na demonstração do teorema de Gauss-Green [3]

A partir do teorema fundamental do cálculo, é possível substituir a integral da derivada pela própria função avaliada em seus limites superior e inferior.

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x} dA = \int_y \left[\int_x \frac{\partial f}{\partial x} dx \right] dy = \int_y [f(x_2) - f(x_1)] dy \quad (1)$$

A geometria mostrada no detalhe -A- da Fig. 4 será usada para substituir dy que aparece na Eq. (1) com uma expressão que envolve o elemento de linha ds . Essas considerações envolvem relações com as componentes do vetor unitário normal ao contorno. Sendo \vec{e}_i ($i = 1, 2, 3$) os vetores unitários na direção dos eixos do plano cartesiano, temos:

$$\vec{t} = \frac{dx}{ds} \vec{e}_1 + \frac{dy}{ds} \vec{e}_2 \quad (2)$$

$$\vec{n} = \frac{dy}{ds} \vec{e}_1 - \frac{dx}{ds} \vec{e}_2 = n_x \vec{e}_1 + n_y \vec{e}_2 \quad (3)$$

A partir daí:

$$\frac{dy}{ds} = n_x \Rightarrow dy = n_x ds \quad (4)$$

Substituindo essas relações na Eq. (1)

$$\int_y [f(x_2) - f(x_1)] dy = \int_{s_2} f(x_2) n_x ds - \int_{s_1} f(x_1) n_x ds \quad (5)$$

Nessa expressão o arco s_1 está à esquerda do contorno, e o lado s_2 à direita do mesmo. Nota-se então que a componente n_x em s_1 é negativa, e podem-se combinar todos os termos na Eq. (5) resultando em uma única expressão.

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x} dA = \int_s f n_x ds \quad (6)$$

Uma simples mudança dos eixos x e y pode mostrar que a relação demonstrada pela Eq. (7) também é verdadeira.

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial y} dA = \int_s f n_y ds \quad (7)$$

Os mesmos argumentos podem ser repetidos para o caso tridimensional. Com o auxílio da Fig. 5 é possível obter resultados análogos.

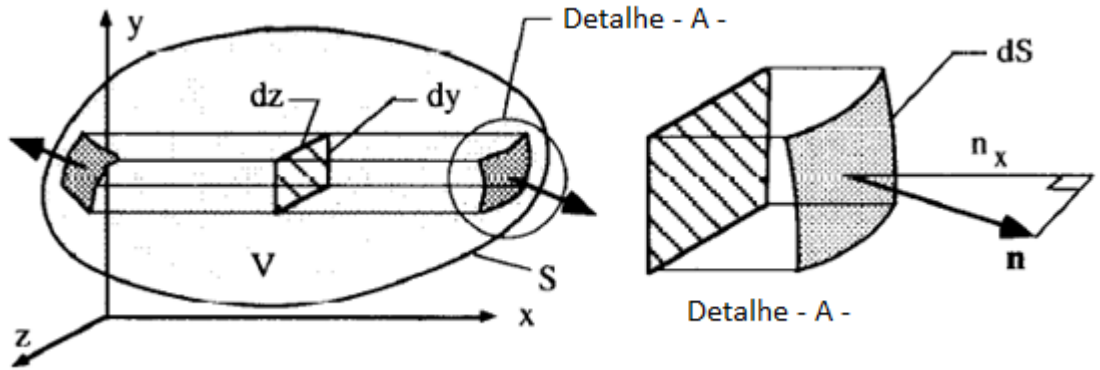


Figura 5. Volume usado na demonstração do teorema 3D de Gauss-Green [3]

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x} dV = \int_z \int_y \left[\int_x \frac{\partial f}{\partial x} dx \right] dy dz = \int_z \int_y [f(x_2) - f(x_1)] dy dz \quad (8)$$

ou

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x} dV = \int_s f n_x dS \quad (9)$$

Em notação indicial,

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_i} dV = \int_S f n_i dS \quad (10)$$

Sabendo que x_i e n_i ($i = 1, 2, 3$) podem assumir valores x, y ou z , e n_x, n_y ou n_z dependendo do valor de i .

2.2 TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

O teorema da divergência é uma variação do teorema de Gauss-Green. Para encontrar essa relação, considere $f = f_i$ a i -ésima componente de um vetor função na Eq. (11).

$$\int_V \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dV = \int_S f_i n_i dS \quad (11)$$

Usando a fórmula da Eq. (11) com $i = 1, 2$ e 3 , e somando os resultados, obtém-se:

$$\int_V \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right) dV = \int_S (f_1 n_1 + f_2 n_2 + f_3 n_3) dS \quad (12)$$

ou

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) dV = \int_S (\vec{f} \cdot \vec{n}) dS \quad (13)$$

2.3 A SEGUNDA IDENTIDADE DE GREEN

Essa relação pode ser encontrada usando o teorema da divergência e as identidades mostradas nas Eqs. (14), (17) e (18). A primeira identidade é igual ao produto de uma função escalar b e o gradiente de outra função a .

$$\vec{f} = b \vec{\nabla} a \quad (14)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \vec{e}_3 \right) \cdot \left(b \frac{\partial a}{\partial x_1} \vec{e}_1 + b \frac{\partial a}{\partial x_2} \vec{e}_2 + b \frac{\partial a}{\partial x_3} \vec{e}_3 \right) \quad (15)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial b}{\partial x_1} \frac{\partial a}{\partial x_1} + b \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \frac{\partial b}{\partial x_2} \frac{\partial a}{\partial x_2} + b \frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} + \frac{\partial b}{\partial x_3} \frac{\partial a}{\partial x_3} + b \frac{\partial^2 a}{\partial x_3^2} \quad (16)$$

ou

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \vec{\nabla} a \cdot \vec{\nabla} b + b \nabla^2 a \quad (17)$$

onde

$$\nabla^2 a = \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_3^2} \quad (18)$$

Agora substituindo a função f no teorema da divergência, Eq. (13)

$$\int_V (\vec{\nabla} a \cdot \vec{\nabla} b + b \nabla^2 a) dV = \int_S (b \vec{\nabla} a \cdot \vec{n}) dS \quad (19)$$

Essa relação pode ser escrita novamente trocando as posições das funções escalares a e b .

$$\int_V (\vec{\nabla} b \cdot \vec{\nabla} a + a \nabla^2 b) dV = \int_S (a \vec{\nabla} b \cdot \vec{n}) dS \quad (20)$$

Pode-se agora subtrair a Eq. (20) da Eq. (19) e obter a segunda identidade de Green.

$$\int_V (b \nabla^2 a - a \nabla^2 b) dV = \int_S (b \vec{\nabla} a \cdot \vec{n} - a \vec{\nabla} b \cdot \vec{n}) dS \quad (21)$$

2.4 FUNÇÃO DELTA DE DIRAC

Em diversas situações na engenharia, perturbações são idealizadas como se ocorressem em um ponto. Exemplos disso são cargas concentradas na mecânica dos sólidos e fontes e sorvedouros de energia em análises de transferência de calor. Ao imaginar uma carga concentrada, na realidade pensamos em uma carga “relativamente concentrada”, como mostra a Fig. 6. Idealizar como ponto depende qualitativamente da proximidade a qual o local de aplicação da perturbação é observado. Em um limite onde o raio da curvatura da carga tende a zero, a tensão tenderá ao infinito e o material falhará. Finalmente, deve-se admitir que fontes concentradas são matematicamente úteis, porém abstratas, mostrando-se úteis para resolver problemas práticos.

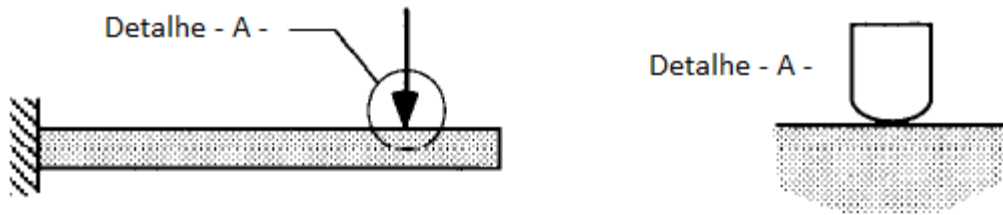


Figura 6. Representação de uma carga concentrada [3]

Com o objetivo de construir uma descrição matemática para as fontes e carregamentos pontuais, será apresentada a função pulso retangular unitário na Fig. 7. Essa função é criada de forma que sua integral seja igual a uma unidade em qualquer domínio onde for “ativada”.

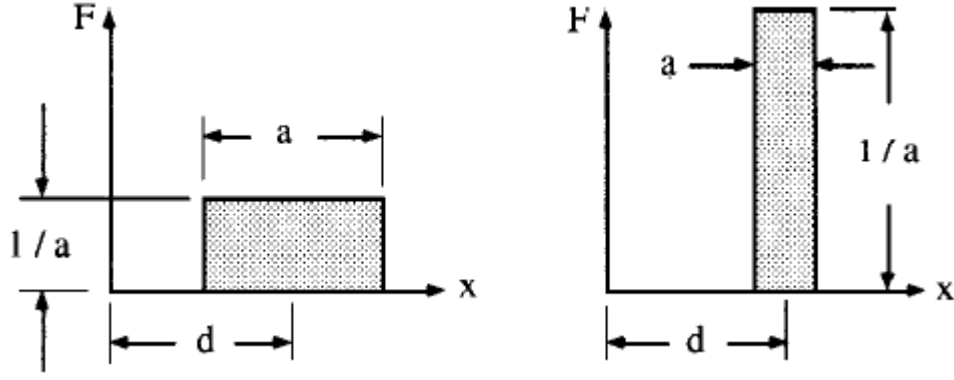


Figura 7. Função pulso retangular unitário [4]

Estando essa função centrada em d e de comprimento a , com função descrita pela Eq. (22).

$$F(x, d, a) = \begin{cases} 0; & x < d - \frac{a}{2} \\ \frac{1}{a}; & d - \frac{a}{2} \leq x \leq d + \frac{a}{2} \\ 0; & x > d + \frac{a}{2} \end{cases} \quad (22)$$

Agora podemos definir a função delta de Dirac como o limite da função pulso retangular unitário quando a se aproxima de zero.

$$\delta(x - d) = \lim_{a \rightarrow 0} F(x, d, a) \quad (23)$$

Essa função se comporta de tal maneira que pode ser usada para representar as fontes pontuais. Quando a região onde a função atua fica menor, a intensidade aumenta de tal forma que a integral da função permanece constante.

As propriedades da função delta de Dirac são chave para o método dos elementos de contorno. Essas propriedades estão demonstradas nas Eqs. (24), (25) e (26).

$$\delta(x - d) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq d \\ \infty, & \text{se } x = d \end{cases} \quad (24)$$

Integral da função delta de Dirac.

$$\int_a^b \delta(x - d) dx = \begin{cases} 1, & \text{se } a \leq d \leq b \\ 0, & \text{se } d < a \text{ ou } d > b \end{cases} \quad (25)$$

Integral do produto de uma função delta de Dirac com outra função $g(x)$.

$$\int_a^b \delta(x - d) g(x) dx = \begin{cases} g(d), & \text{se } a \leq d \leq b \\ 0, & \text{se } d < a \text{ ou } d > b \end{cases} \quad (26)$$

2.5 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA – QUADRATURA DE GAUSS

Segundo Ref. [5], a quadratura de Gauss é um método de integração numérica onde os intervalos não são mais igualmente espaçados. As integrais numéricas tem forma:

$$\int_a^b f(\xi) dx = \sum_{i=0}^n w_i f(\xi_i) \quad (27)$$

Os pontos utilizados no método são escolhidos de forma que os $n + 1$ pontos apropriadamente escolhidos resultem como integral exata quando $f(\xi)$ é um polinômio de grau $2n + 1$ ou menor.

Programas de computador e tabelas difundidas na literatura fornecem os pontos (ξ_i) e pesos de Gauss (w_i) para o intervalo $[-1, 1]$. Com isso é feita uma substituição de variável, e obtém-se a Eq. (28).

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) \frac{dx}{d\xi} d\xi \quad (28)$$

em que

$$x(\xi) = \frac{1}{2} [(b - a)\xi + (a + b)] \quad (29)$$

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{(b - a)}{2} \quad (30)$$

2.6 MÉTODO DA INTEGRAÇÃO RADIAL

A função desse método é a transformação de integrais de domínio em integrais de contorno. Considerando um domínio bidimensional, a integral de uma função $f(x, y)$ sobre a área Ω de uma figura plana é dada pela integral:

$$I = \int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\theta} \int_0^r f[x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)] \rho d\rho d\theta \quad (31)$$

Onde r é um valor de ρ no contorno. A Figura 8 ilustra os vetores e as considerações feitas pelo método da integração radial.

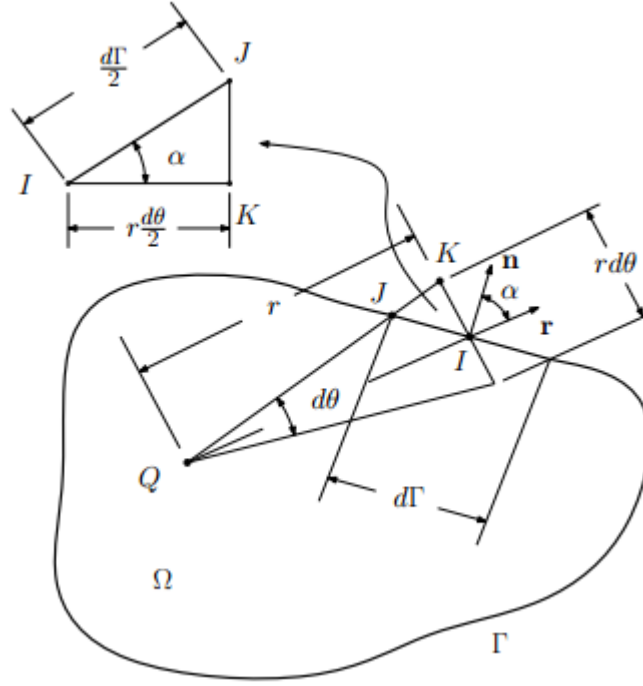


Figura 8. Visualização do método da integração radial [6]

Definindo F como a seguinte integral:

$$F(\rho, \theta) = \int_0^r f[x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)] \rho d\rho \quad (32)$$

Considerando um ângulo infinitesimal $d\theta$ é possível encontrar uma relação entre o comprimento do arco, $r d\theta$, e o comprimento infinitesimal do contorno, $d\Gamma$.

$$d\theta = \frac{\cos \alpha}{r} d\Gamma \quad (33)$$

Onde α é o ângulo entre os vetores unitários \vec{r} e \vec{n} . A partir das propriedades do produto interno, é possível escrever:

$$d\theta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r} d\Gamma \quad (34)$$

Substituindo a Eq. (34) na Eq. (32), e em seguida na Eq. (31), a equação de domínio se torna uma equação de contorno:

$$I = \int_{\Gamma} F \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r} d\Gamma \quad (35)$$

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

3.1 CONCEITOS BÁSICOS

O método dos elementos de contorno (BEM – Boundary Elements Method) é uma técnica computacional para a aproximação de soluções de problemas na mecânica do contínuo. Esses problemas são caracterizados matematicamente por equações diferenciais governantes cujas soluções analíticas, dependendo da complexidade do caso, não são possíveis de encontrar.

Técnicas de simulação numérica podem ser divididas em três grandes vertentes: diferenças finitas, elementos finitos e elementos de contorno. Todos os três envolvem os seguintes passos:

1. Substituição de expressões envolvendo cálculo por relações algébricas aproximadas;
2. Uso de malha computacional para descrever a geometria do corpo a ser simulado;
3. Solução de equações algébricas para determinar as condições desconhecidas na malha.

Nenhum método se mostra superior aos outros em todos os casos. Cada um possui suas vantagens e desvantagens. No caso dos elementos de contorno as mais significativas são:

Tabela 1. Vantagens e desvantagens do método dos elementos de contorno

Elementos de Contorno	
Vantagens	Desvantagens
<ul style="list-style-type: none">• Simples modelagem de fronteiras e condições de contorno.• Necessita apenas de malha superficial.• Ideal para problemas infinitos.• A precisão da solução não está ligada à quantidade de pontos internos.	<ul style="list-style-type: none">• Precisa de solução fundamental.• Possui uma grande quantidade de integrações numéricas de funções complexas.• Matrizes cheias e assimétricas.

3.2 INTRODUÇÃO À TRANSFERÊNCIA DE CALOR

3.2.1 Equação geral da condução de calor

A lei de condução de calor de Fourier é uma equação determinada experimentalmente que relaciona o gradiente de temperatura com a taxa de condução de calor no tempo. Para o caso da condução de calor unidirecional (Fig. 9), a energia térmica que flui através de uma parede de seção transversal A é dada pela Eq. (36).

$$\dot{Q}_x = -kA \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (36)$$

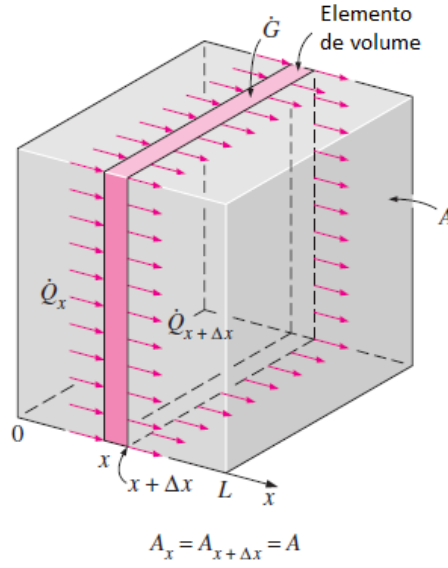


Figura 9. Condução de unidirecional em uma unidade de volume de uma parede extensa [7]

Para um elemento infinitesimal:

$$\dot{Q}_x = -k A \frac{\partial T}{\partial x} \quad (37)$$

Generalizando para as 3 direções, os fluxos de calor por unidade de área, \dot{q} , podem ser encontrados segundo a Eq. (38).

$$\dot{q} = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \right) = -k \vec{\nabla} T \quad (38)$$

A 1ª lei da termodinâmica estabelece que para um sistema termodinâmico na ausência de trabalho $dQ = dU$. Aplicando em um elemento pequeno como o da Fig. 9, em apenas uma direção.

$$\dot{Q}_x + \dot{E}_{ger,elem} - \dot{Q}_{x+\Delta x} = \frac{\Delta E_{elem}}{\Delta t} \quad (39)$$

A variação do calor dentro do elemento e a taxa de calor gerada no elemento podem ser expressas pela Eq. (40).

$$\Delta E_{elem} = \Delta E_{t+\Delta t} - \Delta E_t = mc(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho c A \Delta x (T_{t+\Delta t} - T_t) \quad (40)$$

onde c é o calor específico do sólido.

$$\dot{E}_{ger,elem} = \dot{e}_{ger} dV = \dot{e}_{ger} A \Delta x \quad (41)$$

Substituindo na Eq. (39).

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x} + \dot{e}_{ger}A\Delta x = \rho c A \Delta x \frac{(T_{t+\Delta t} - T_t)}{\Delta t} \quad (42)$$

Dividindo por $A\Delta x$ e considerando um elemento infinitesimal ($\Delta x \rightarrow 0$) com um passo de tempo tendendo a zero ($\Delta t \rightarrow 0$), tem-se

$$\frac{1}{A} \frac{\partial \dot{Q}}{\partial x} + \dot{e}_{ger} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (43)$$

como

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x})}{\Delta x} = \frac{\partial \dot{Q}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(kA \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (44)$$

Então, já que a área é constante:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{e}_{ger} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (45)$$

A partir das Eqs. (38) e (45), são encontradas as equações de condução de calor em uma parede extensa plana com condutividade constante. Essas equações estão representadas a seguir:

- Regime permanente sem geração de calor (equação de Laplace).

$$\nabla^2 T = 0 \quad (46)$$

- Regime permanente com geração de calor (equação de Poisson).

$$\nabla^2 T = -\frac{\dot{e}_{ger}}{k} \quad (47)$$

- Regime transiente sem geração de calor.

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (48)$$

Reproduzindo o mesmo processo em coordenadas cilíndricas obtém-se:

- Regime permanente sem geração de calor (equação de Laplace).

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (49)$$

- Regime permanente com geração de calor (equação de Poisson).

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\frac{\dot{e}_{ger}}{k} \quad (50)$$

- Regime transiente sem geração de calor.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (51)$$

Agora em coordenadas esféricas:

- Regime permanente sem geração de calor (equação de Laplace).

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (52)$$

- Regime permanente com geração de calor (equação de Poisson).

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = - \frac{\dot{e}_{ger}}{k} \quad (53)$$

- Regime transiente sem geração de calor.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (54)$$

3.2.2 Condições de contorno

Existem quatro condições de contorno principais: temperatura conhecida, fluxo conhecido, convecção e radiação. As equações gerais da condução de calor não incorpora nenhuma informação sobre as condições de contorno, necessitando então determinar essas condições térmicas nas superfícies das fronteiras para que a descrição do problema esteja completa.

As condições de temperatura e fluxo são mais simples, onde se tem diretamente ou o valor da temperatura ou o do fluxo de calor. A condição de contorno de convecção é um pouco mais complicada, porém, o fluxo varia linearmente com a temperatura, considerando o coeficiente de transferência de calor por convecção constante. Por último, a condição de contorno de radiação é a mais complicada, pois varia com a temperatura de forma não linear.

Nem sempre a transferência de calor por radiação é 100% com ambiente onde o objeto está localizado. No caso das superfícies côncavas, parte da radiação é irradiada para a própria superfície, como mostra a Fig. 10. De uma maneira simplificada, o fator de visão mede a fração da energia que é irradiada para cada superfície ao seu redor, sendo a soma total de todos eles igual a 1.

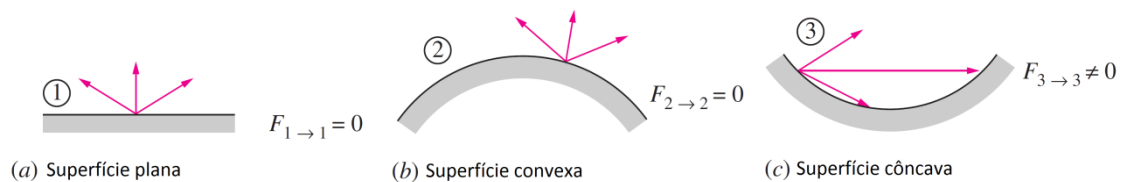


Figura 10. Exemplo de fatores de forma em diferentes superfícies [7]

onde $F_{a \rightarrow b}$ é o fator de visão de uma superfície a para uma superfície b .

O fator de visão também é conhecido por fator de forma pois ele depende da geometria das superfícies e da posição de uma em relação à outra. Existem fórmulas e gráficos para calculá-los, porém geralmente são para casos bidimensionais ou tem-se geometrias muito limitadas (a maioria de apenas quatro lados).

A Figura 11 ilustra dois elementos de áreas, e a Eq. (55) encontra o valor dos fatores de forma.

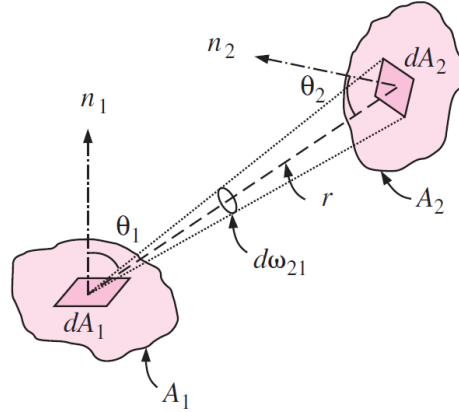


Figura 11. Fator de forma em elementos infinitesimais [7]

$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{A_1} \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 \quad (55)$$

Para resolver essa equação existem várias maneiras. O método utilizado foi o método CDIF (“*Contour Double Integral Formula*”), que usa o teorema de Stokes na solução da Eq. (55) [8]. Com isso é possível encontrar fatores de visão de maneira direta, sem precisar de gráficos, e precisa podendo fazer uso de geometrias mais complexas.

Esses são os conceitos básicos envolvidos no método dos elementos de contorno aplicados à transferência de calor. A partir daí é feita a formulação do método, variando com relação às equações gerais de condução de calor, para resolver problemas com determinadas condições de contorno numericamente.

3.3 CASO BIDIMENSIONAL

3.3.1 Solução fundamental para a condução de calor

Uma das principais características do método dos elementos de contorno é o uso de soluções conhecidas do problema a ser investigado. Na condução de calor, a resposta térmica estacionária

de um meio infinito condutor para um ponto fonte com geração interna de energia é chamada *solução fundamental*. Essa solução deve satisfazer a equação diferencial dada pela Eq. (56) [3]

$$\nabla^2 T^* = -\frac{\delta(x-d)}{k} \quad (56)$$

A função delta de Dirac é ideal para representar cargas e fontes pontuais, como mostrado na seção 2.4, e é ativada quando o ponto fonte d coincide com o ponto campo x . Intuitivamente o problema parece artificial, já que a temperatura no centro da fonte concentrada deve ser infinita, certamente o material derreteria e em seguida se vaporizaria. Matematicamente, é dito que esse comportamento é *singular*, e esse é um ponto de singularidade. Ou seja, para a compreensão do método, a melhor maneira para caracterizar esse tipo de função é admitir que ela é fisicamente estranha mas matematicamente útil.

Para estudar a solução da Eq. (56), considere a origem do sistema de coordenadas bidimensional o ponto fonte ($d = 0$). Essa mesma equação diz que o Laplaciano da distribuição de temperatura é zero em todos os pontos, exceto na origem. Portanto, é necessário selecionar uma equação fundamental que tenha um comportamento singular na origem. Outra consideração é que o problema deve ter simetria cilíndrica com relação à origem, ou seja, os pontos campo a uma distância radial R são equivalentes. Com todas essas considerações, a física do problema sugere que a temperatura se comporte da forma $T = \ln(R)$, já que o fluxo de calor $\left(\frac{dT}{dR}\right)$ deve se comporta como $\frac{1}{R}$.

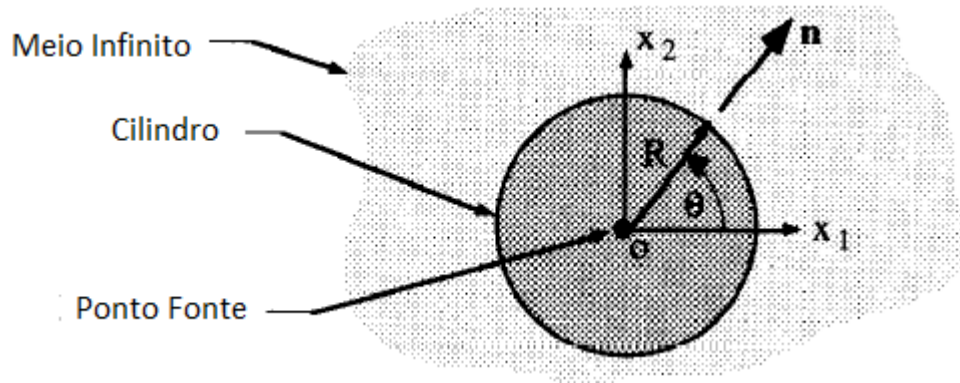


Figura 12. Ilustração usada para o cálculo do fluxo de calor devido a um ponto fonte [3]

$$T^* = \ln(R) \quad (57)$$

onde

$$R = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)} \quad (58)$$

Para provar que essa função tem laplaciano igual a zero, deriva-se:

$$\frac{\partial T^*}{\partial x_1} = \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial x_1} \quad (59)$$

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x_1^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial x_1^2} - \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial R}{\partial x_1} \right)^2 \quad (60)$$

Sabendo que:

$$\frac{\partial R}{\partial x_1} = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}} (2x_1) = \frac{x_1}{R} \quad (61)$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x_1^2} = \frac{1}{R} - \frac{x_1^2}{R^3} \quad (62)$$

Então, substituindo na Eq. (60) e sabendo que é análogo derivando com relação a x_2 .

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x_1^2} = \frac{1}{R^2} - \frac{2x_1^2}{R^4} \quad (63)$$

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x_2^2} = \frac{1}{R^2} - \frac{2x_2^2}{R^4} \quad (64)$$

$$\nabla^2 T^* = 2 * \left(\frac{1}{R^2} - \frac{R^2}{R^4} \right) \quad (65)$$

A Equação (65) é zero em todos os pontos exceto na origem, onde a equação tem valor indeterminado já que R é zero. Para analisar o comportamento do Laplaciano próximo à origem, não podemos simplesmente cancelar os termos. Ou seja, essa solução fundamental satisfaz quando o ponto fonte não coincide com o ponto campo [3].

Define-se fluxo de calor através do contorno pela expressão [7]:

$$\dot{Q} = \int_S \vec{q}^* \cdot \vec{n} dS = \int_0^{2\pi} \left(-k \frac{dT^*}{dR} \right) t R d\theta = -2\pi k t \quad (66)$$

Onde t é a espessura do elemento, considerada unitária. Para que o valor da fonte seja unitário é introduzida a constante A .

$$T^* = A \ln(R); \text{ então } \dot{Q} = -2\pi k t A = 1 \quad (67)$$

Logo.

$$T^* = -\frac{1}{2\pi k t} \ln(R) \quad (68)$$

O fluxo de calor correspondente à solução fundamental de temperatura é encontrado usando a lei de condução de Fourier.

$$\vec{q}^* = -k\vec{\nabla}T^* = -k\left(\frac{\partial T^*}{\partial x}\vec{e}_1 + \frac{\partial T^*}{\partial y}\vec{e}_2\right) = \frac{1}{2\pi kt}(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) \quad (69)$$

Generalizando agora para um caso onde o ponto fonte está em um ponto de coordenadas (x_d, y_d) e o ponto campo nas coordenadas (x_i, y_i) , obtém-se:

$$R = \sqrt{(x_i - x_d)^2 + (y_i - y_d)^2} \quad (70)$$

$$T^* = -\frac{1}{2\pi kt}\ln(R); e \vec{q}^* = \frac{1}{2\pi kt}((x_i - x_d)\vec{e}_1 + (y_i - y_d)\vec{e}_2) \quad (71)$$

3.3.2 A equação integral para a condução de calor.

A partir da segunda identidade de Green (seção 2.3), supondo que a função f é igual à resposta real da temperatura do problema ($f = T$) e g é igual à solução fundamental da temperatura ($g = T^*$), tem-se:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 f g d\Omega - \int_{\Omega} \nabla^2 g f d\Omega = \int_S g \vec{\nabla} f \cdot \vec{n} dS - \int_S f \vec{\nabla} g \cdot \vec{n} dS \quad (72)$$

$$\int_{\Omega} \nabla^2 T T^* d\Omega - \int_{\Omega} \nabla^2 T^* T d\Omega = \int_S T^* \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} dS - \int_S T \vec{\nabla} T^* \cdot \vec{n} dS \quad (73)$$

De acordo com Eq. (46), o primeiro termo da Eq. (73) deve ser igual a zero em problemas permanentes sem geração de energia. A partir da Eq. (56) e das propriedades da função delta de Dirac, é possível simplificar o segundo termo da equação integral para $\frac{T(d)}{k}$. Sendo o fluxo determinado pela Eq. (38), o lado direito da equação é simplificado.

$$\int_{\Omega} (0) T^* d\Omega - \int_{\Omega} \left(-\frac{\delta(x-d)}{k}\right) T d\Omega = \int_S T^* \left(\frac{\vec{q}}{-k}\right) \cdot \vec{n} dS - \int_S T \left(\frac{\vec{q}^*}{-k}\right) \cdot \vec{n} dS \quad (74)$$

$$cT(d) = \int_S T \vec{q}^* \cdot \vec{n} dS - \int_S T^* \vec{q} \cdot \vec{n} dS \quad (75)$$

O símbolo c dessa equação é conhecido por fator geométrico cujo valor depende da posição do ponto fonte [4,3]. Quando d está dentro de Ω , c é igual a 1. Quando d está fora de Ω , c é igual a 0 e quando d pertence a S , e esse contorno for suave, c é igual a 0,5. Esses valores estão provados no Anexo I.

$$cT(d) = \int_S T \vec{q}^* dS - \int_S T^* \vec{q} dS \quad (76)$$

Em fim é provada a equação integral de contorno, que é equivalente à Eq. (73). Com base na Eq. (76), problemas permanentes sem geração de calor interna são resolvidos através do método dos elementos de contorno. Note que existem apenas integrais de contorno. Outras equações

integrais serão mostradas no decorrer do trabalho para casos diferentes, todas tendo em comum a ausência de integrais no domínio.

3.3.3 Elementos de contorno

A equação integral pode ter solução analítica, mas não é isso que ocorre na grande maioria dos casos. Com isso, o método subdivide o contorno em pequenas seções com é mostrado na Fig. 13.

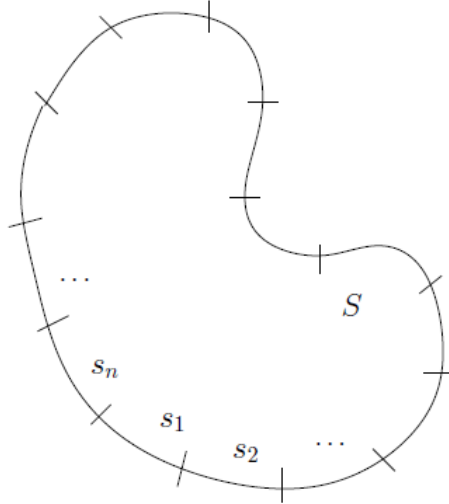


Figura 13. Subdivisão da superfície real S [6]

$$S = s_1 + s_2 + \dots + s_n \quad (77)$$

Por consequência, a integral do contorno se torna um somatório de integrais.

$$cT(d) = \sum_{i=1}^n \int_{s_i} T \dot{q}^* ds - \sum_{i=1}^n \int_{s_i} T^* \dot{q} ds \quad (78)$$

A geometria dos elementos é então aproximada segundo uma função de forma (Fig. 14). Dessas funções, as mais usadas são as quadráticas (parábola) e as lineares (reta). Quando se trata de superfícies curvas, os elementos quadráticos são os que melhor representam a superfície, porém sua implementação é questionável já que a melhora no resultado em alguns casos é pequena e não compensa o acréscimo no custo computacional [6,4,3].

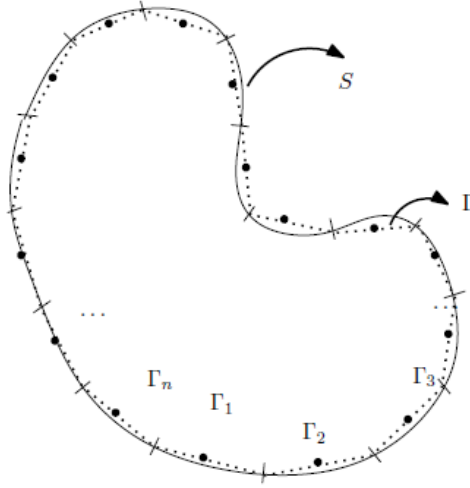


Figura 14. Interpolação da superfície real com elementos lineares [6]

A equação integral para os elementos nesse contorno se reduz a:

$$\frac{1}{2}T_i(d) = \sum_{j=1}^n \left[T_j \int_{\Gamma_j} \dot{q}^* d\Gamma \right] - \sum_{j=1}^n \left[\dot{q}_j \int_{\Gamma_j} T^* d\Gamma \right] \quad (79)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[T_j \int_{\Gamma_j} \dot{q}^* d\Gamma \right] - \frac{1}{2}T_i(d) = \sum_{j=1}^n \left[\dot{q}_j \int_{\Gamma_j} T^* d\Gamma \right] \quad (80)$$

chamando

$$H_{ij} = \begin{cases} \int_{\Gamma_j} \dot{q}^* d\Gamma, & \text{se } i \neq j \\ -\frac{1}{2} + \int_{\Gamma_j} \dot{q}^* d\Gamma, & \text{se } i = j \end{cases} \quad (81)$$

e

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} T^* d\Gamma \quad (82)$$

A Eq. (80) é escrita na forma

$$\sum_{j=1}^n [H_{ij}T_j] = \sum_{j=1}^n [G_{ij}\dot{q}_j] \quad (83)$$

Já que para cada elemento ou se sabe a temperatura, ou se sabe o fluxo de calor (nos casos mais simples), é gerada uma equação para cada elemento, e cada elemento com uma incógnita, ou seja, um sistema cuja solução é possível. Veja o exemplo mostrado na Fig. 15, de uma placa

com as superfícies superior e inferior isoladas, e temperaturas determinadas nas outras duas extremidades.

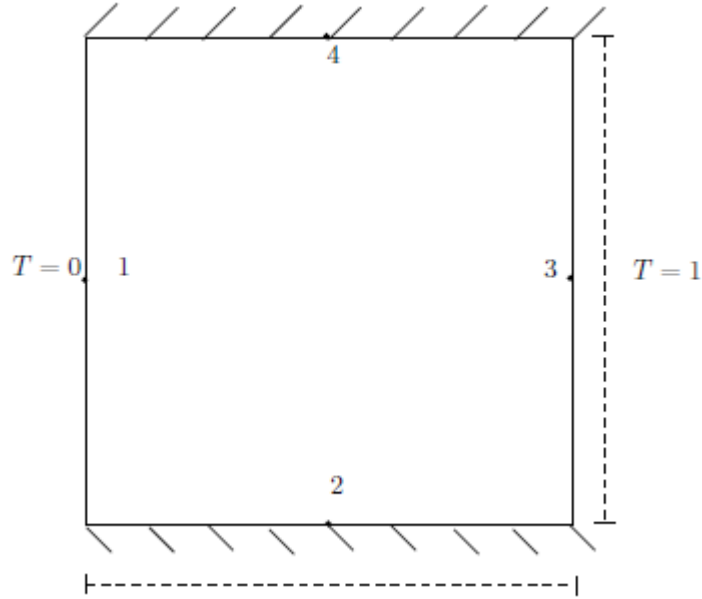


Figura 15. Exemplo de um problema bem colocado [6]

Marcando com uma barra os valores já conhecidos o sistema de equações é representado pela seguinte igualdade.

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \\ \bar{T}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{Bmatrix} \quad (84)$$

Esse é um exemplo de um **problema bem colocado**, onde ou a temperatura ou o fluxo de calor foram determinados como condições de contorno. Todos os valores dentro das matrizes $[G]$ e $[H]$ são determinados por meio de integração numérica, no caso com o método dos pesos de Gauss e, quando $i = j$, é necessário calcular de outra maneira para não cair em singularidade. Então, com 4 equações e 4 incógnitas é possível encontrar as incógnitas do problema.

3.3.4 Integração das matrizes $[G]$ e $[H]$

Quando o ponto fonte não pertence ao elemento

- **Matriz $[G]$**

Das Eqs. (68) e (82), tem-se:

$$G_{ij} = -\frac{1}{2\pi k} \int_{\Gamma} \ln R \, d\Gamma \quad (85)$$

onde

$$R = \sqrt{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2} \quad (86)$$

Das quais (x_d, y_d) são as coordenadas do ponto fonte e (x, y) as coordenadas do ponto campo. Considerando o elemento j , conforme mostra a Fig. 16, tem-se:

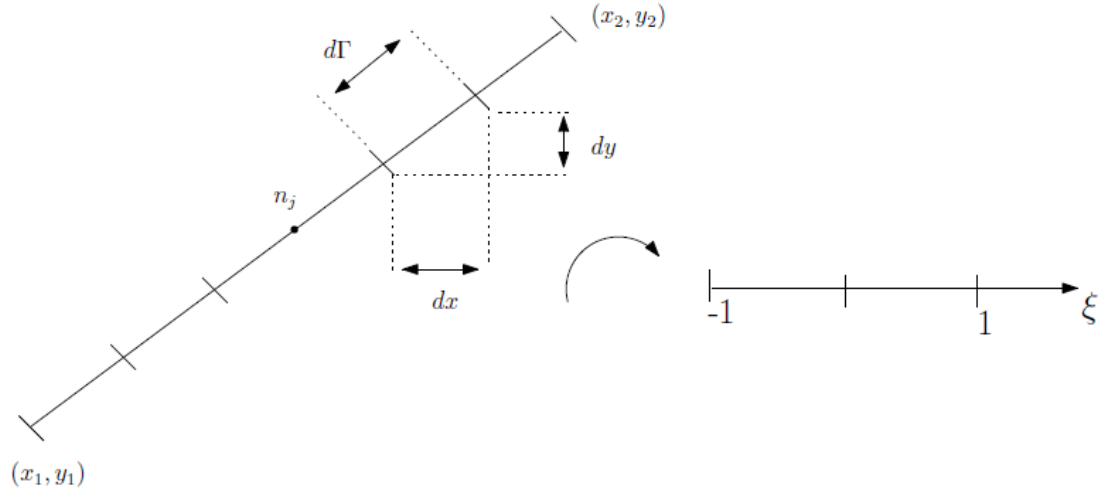


Figura 16. Sistemas de referência local e global, respectivamente [6]

$$x = f(\xi) \Rightarrow x(\xi = -1) = x_1 \text{ e } x(\xi = 1) = x_2 \quad (87)$$

$$y = f(\xi) \Rightarrow y(\xi = -1) = y_1 \text{ e } y(\xi = 1) = y_2 \quad (88)$$

Onde ξ são os pontos de Gauss que variam no intervalo $[-1, 1]$.

São definidas então as funções de forma $N_1(\xi)$ e $N_2(\xi)$ [1,2,6]

$$\left. \begin{array}{l} N_1(-1) = 1 \\ N_1(1) = 0 \end{array} \right\} N_1(\xi) = \frac{1 - \xi}{2} \quad (89)$$

$$\left. \begin{array}{l} N_2(-1) = -1 \\ N_2(1) = 1 \end{array} \right\} N_2(\xi) = \frac{\xi + 1}{2} \quad (90)$$

A partir dessas equações, é possível encontrar as coordenadas segundo as posições de ξ no elemento a partir das Eqs. (91) e (92).

$$x(\xi) = N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 = \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)\xi + (x_1 + x_2)] \quad (91)$$

$$y(\xi) = N_1(\xi)y_1 + N_2(\xi)y_2 = \frac{1}{2}[(y_2 - y_1)\xi + (y_1 + y_2)] \quad (92)$$

E a partir daí, o comprimento de uma fração do elemento $d\Gamma$ é descrita como:

$$d\Gamma = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \quad (93)$$

Dividindo ambos os termos da igualdade por $d\xi$ é obtido o jacobiano.

$$\frac{d\Gamma}{d\xi} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{d\xi} \quad (94)$$

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{x_2 - x_1}{2} \text{ e } \frac{dy}{d\xi} = \frac{y_2 - y_1}{2} \quad (95)$$

Assim:

$$\frac{d\Gamma}{d\xi} = \frac{1}{2} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{1}{2} L \quad (96)$$

Onde L é o comprimento total do elemento. Então:

$$G_{ij} = -\frac{1}{2\pi k} \int_{-1}^1 \ln[R(\xi)] \frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi \quad (97)$$

Portanto, usando a integração por pontos de Gauss, tem-se:

$$G_{ij} = -\frac{1}{2\pi k} \sum_{i=1}^{NPG} \ln[R_i] \frac{d\Gamma}{d\xi} \omega_i \quad (98)$$

Onde NPG é o número de pontos de Gauss e ω_i os pesos de Gauss.

○ **Matriz $[H]$**

A matriz $[H]$, das Eqs. (81) e (69):

$$H_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{(x - x_d)n_x + (y - y_d)n_y}{R^2} d\Gamma \quad (99)$$

Como mostra Fig. 17, a numeração dos nós no sentido anti-horário determina um vetor normal apontando para fora do elemento. A partir disso, o programa reconhece se foi modelado um buraco, ou um sólido.

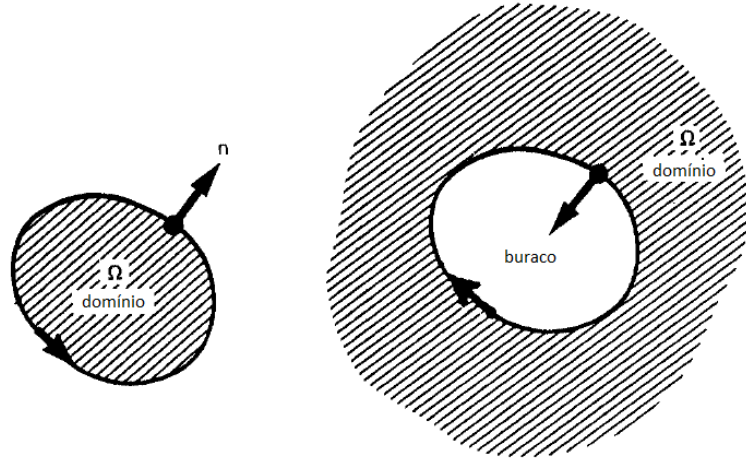


Figura 17. Direção da numeração dos elementos [4]

Chamando de \vec{s} o vetor tangente ao contorno. Os vetores \vec{n} e \vec{s} são perpendiculares entre si, então:

$$\vec{n} \cdot \vec{s} = 0 \quad (100)$$

$$n_x s_x + n_y s_y = 0 \quad (101)$$

Como a convenção é o sentido anti-horário, temos que:

$$n_x = s_y \quad e \quad n_y = -s_x \quad (102)$$

sendo

$$\vec{s} = \frac{(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \quad (103)$$

$$s_x = \frac{(x_2 - x_1)}{L} \quad e \quad s_y = \frac{(y_2 - y_1)}{L} \quad (104)$$

Então as coordenadas do vetor normal são dadas pela Eq. (105).

$$n_x = \frac{(y_2 - y_1)}{L} \quad e \quad n_y = -\frac{(x_2 - x_1)}{L} \quad (105)$$

Com isso:

$$H_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{(x - x_d)n_x + (y - y_d)n_y}{R^2} \frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi \quad (106)$$

$$H_{ij} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{NPG} \frac{(x - x_d)n_x + (y - y_d)n_y}{R^2} \frac{d\Gamma}{d\xi} \omega_i \quad (107)$$

Quando o ponto fonte pertence ao elemento

○ Matriz $[G]$

Das Eqs. (68) e (82), a partir de algumas manipulações matemáticas é possível encontrar uma solução.

$$G_{ii} = -\frac{1}{2\pi k} 2 \int_0^{\frac{L}{2}} \ln(R) dR \quad (108)$$

$$G_{ii} = -\frac{1}{\pi k} [R \ln(R)]_0^{\frac{L}{2}} \quad (109)$$

$$G_{ii} = -\frac{1}{\pi k} \left[\frac{L}{2} - \frac{L}{2} \ln \frac{L}{2} - 0 + \lim_{R \rightarrow 0} R \ln(R) \right] \quad (110)$$

$$G_{ii} = \frac{L}{2\pi k} \left[1 - \ln \left(\frac{L}{2} \right) \right] \quad (111)$$

○ Matriz $[H]$

A matriz $[H]$ das Eqs. (81) e (71), quando $i = j$:

$$H_{ii} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{(x - x_d)n_x + (y - y_d)n_y}{R^2} d\Gamma \quad (112)$$

Chamando:

$$R_x = (x - x_d) \quad e \quad R_y = (y - y_d) \quad (113)$$

Quando o ponto fonte pertence ao elemento:

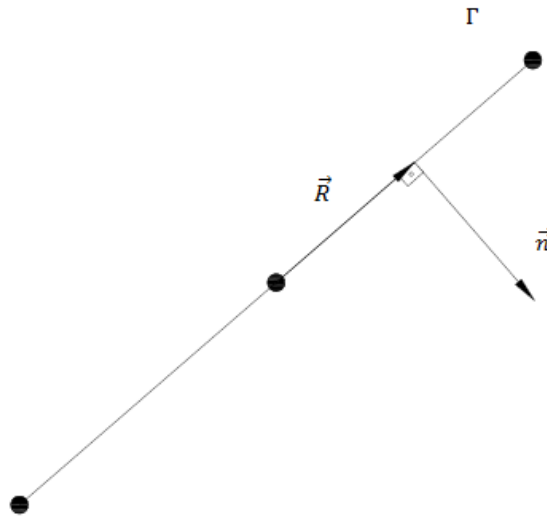


Figura 18. Vetores \vec{R} e \vec{n} quando o ponto fonte pertence ao elemento

$$R_x n_x + R_y n_y = \vec{R} \cdot \vec{n} = 0 \quad (114)$$

Então:

$$H_{ii} = -\frac{1}{2} \quad (115)$$

3.4 CASO TRIDIMENSIONAL

3.4.1 Solução fundamental

Para o problema da condução de calor, as características da solução fundamental podem ser deduzidas com o auxílio da Fig. 19. Essa figura representa uma fonte de calor unitária no ponto d , localizada no centro da esfera, devido à simetria do problema é fácil calcular a quantidade de energia que atravessa a superfície esférica.

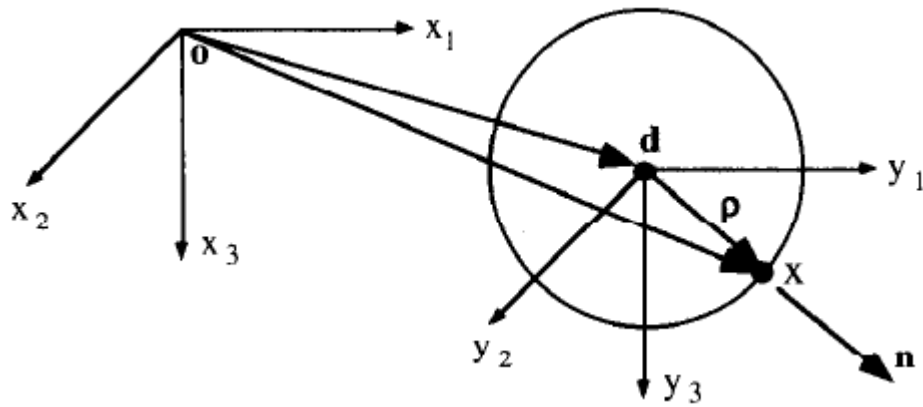


Figura 19. Superfície esférica para o cálculo do fluxo de calor para um ponto fonte [3]

A primeira afirmação que pode ser feita é o simples fato de que a energia conduzida através da esfera deve ser igual à energia gerada no seu interior. Para afirmar isso, a energia atravessando a superfície deve se comportar como ρ^{-2} , já que a área do elemento agora se comporta como ρ^2 .

A partir das condições físicas do problema, é sugerido que a temperatura se comporte da forma [3]:

$$T^* = \rho^{-1} \quad (116)$$

Sendo

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^3 y_i^2} \quad (117)$$

A partir do elemento infinitesimal da esfera da Fig. 20 obtém-se:

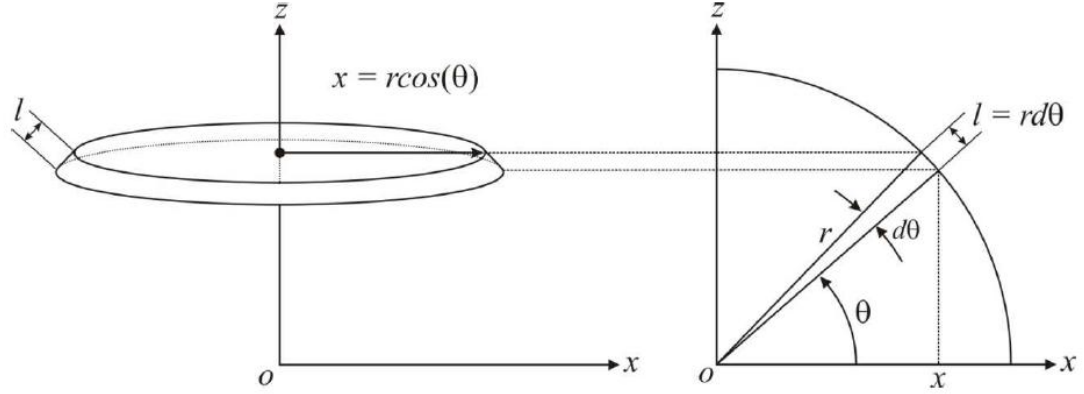


Figura 20. Representação do elemento infinitesimal esférico [3]

$$dS = 2\pi\rho^2 \cos \theta d\theta \quad (118)$$

$$\dot{Q} = \int_S \vec{q}^* \cdot \vec{n} dS = 2 \int_0^{\pi/2} \left(-k \frac{\partial T^*}{\partial \rho} \right) 2\pi\rho^2 \cos \theta d\theta = 4\pi k \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = 4\pi k \quad (119)$$

Multiplicando a solução fundamental por uma constante A de forma a tornar o fluxo total de calor na superfície unitário, como o calor gerado internamente.

$$T^* = A\rho^{-1}; \text{então } \dot{Q} = 4\pi kA = 1 \quad (120)$$

Então:

$$T^* = \frac{1}{4\pi k} \rho^{-1} \quad (121)$$

Com a solução fundamental para a temperatura, encontra-se a solução fundamental para o fluxo de calor normal à superfície:

$$q^* = -k \vec{\nabla} T^* \cdot \vec{n} \quad (122)$$

sendo

$$\frac{\partial T^*}{\partial x_i} = \frac{1}{4\pi k} \left\{ -1\rho^{-2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right) \right\} = -\frac{1}{4\pi k} \left\{ \rho^{-2} \left[\frac{1}{2} \rho^{-1} (2y_i) \right] \right\} = -\frac{1}{4\pi k} \rho^{-3} y_i \quad (123)$$

Ao final, tem-se:

$$q^* = \frac{1}{4\pi} \rho^{-3} y_i n_i \quad (124)$$

3.4.2 Equação integral

A equação integral para o caso 2D ou 3D são idênticas, dadas por:

$$cT(d) = \int_S T \dot{q}^* dS - \int_S T^* \dot{q} dS \quad (125)$$

A única diferença é que a superfície deixa de ser um filamento de espessura constante t , e passa a ser uma superfície tridimensional complexa, sendo então uma integral dupla.

3.4.3 Elementos de contorno tridimensionais

A escolha do tipo de elemento a ser utilizado se faz de forma muito mais complexa nesse novo caso. Além de escolher a ordem do elemento (elemento plano – primeira ordem; elemento curvo – ordem superior) e decidir entre elementos contínuos e descontínuos, é preciso determinar o polígono que descreverá a forma do elemento plano.

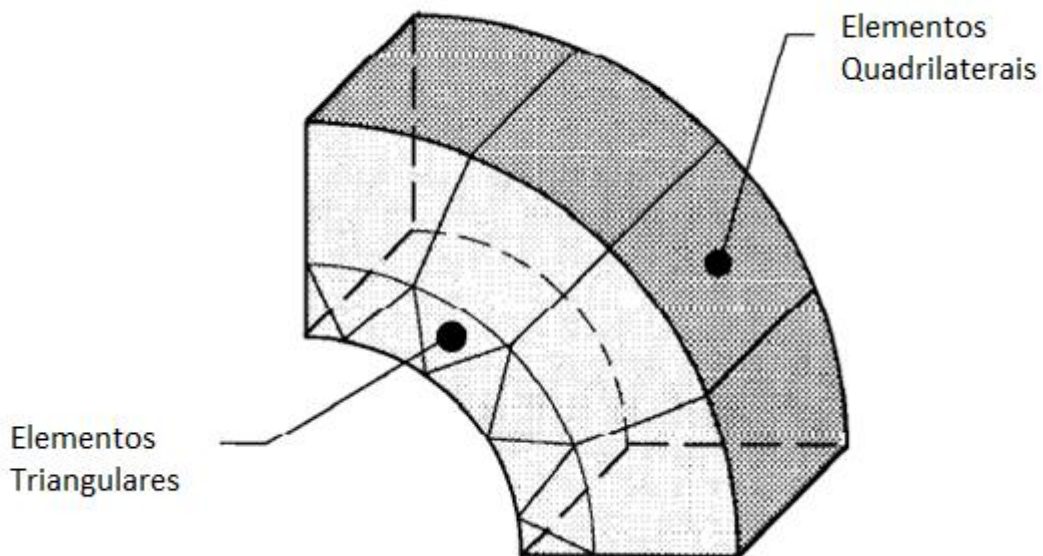


Figura 21. Modelagem da superfície com diferentes elementos [3]

A Figura 21 mostra uma malha usando diversos tipos de elementos. Existem segmentos curvos e retos, elementos quadrilaterais e triangulares, todos como elementos contínuos. Existem vantagens em cada geometria, uma malha quadrilateral, por exemplo, é mais fácil de

ser construída, já uma malha triangular consegue variar em um menor espaço uma transição de malha grosseira para uma mais refinada.

Os elementos também se distinguem pelo número de nós. O elemento utilizado nesse trabalho é o quadrilateral constante, e este será analisado a seguir. A representação na Fig. 22 mostra um quadrilátero qualquer com quatro nós, cada um em seus respectivos vértices.

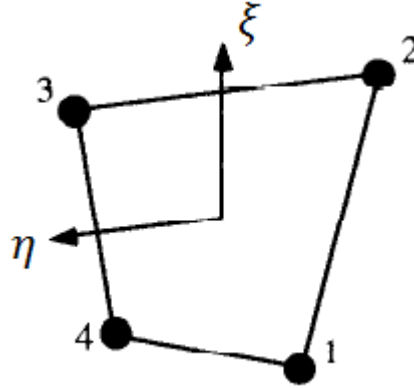


Figura 22. Elemento quadrilateral de quatro nós [3]

A função de forma agora depende de quatro equações. Essas funções de forma também dependem de duas variáveis, ξ e η , por se tratar de um elemento plano. As funções lineares que representam cada nó do quadrilátero são [3]:

$$\begin{cases} N^{(1)} = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N^{(2)} = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N^{(3)} = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N^{(4)} = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{cases} \quad (126)$$

Onde

$$-1 \leq \xi \leq 1 \text{ e } -1 \leq \eta \leq 1 \quad (127)$$

No caso dos elementos constantes, a temperatura é a mesma em todo o elemento. Este elemento é representado por um nó físico, cujas coordenadas são encontradas pela Eq. (128). Para o caso onde a temperatura varia linearmente dentro do elemento, observe que as funções N são funções de “influência”, ou seja, quanto mais próximo do nó k , maior a influência das propriedades desse nó e menor a influência dos demais. Para que isso ocorra, o somatório dessas funções de interpolação sempre será 1.

$$x(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^4 N^{(k)} x^{(k)}; y(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^4 N^{(k)} y^{(k)} \quad (128)$$

A área superficial diferencial de um elemento $d\Gamma$ é facilmente obtida a partir do produto vetorial da Eq. (129) [3].

$$d\Gamma = |dR_1 \times dR_2| = \left| \frac{\partial R}{\partial \xi} \times \frac{\partial R}{\partial \eta} \right| d\xi d\eta = g d\xi d\eta \quad (129)$$

onde

$$R = x_k e_k; \frac{\partial R}{\partial \xi} = \frac{\partial x_k}{\partial \xi} \vec{e}_k; \frac{\partial R}{\partial \eta} = \frac{\partial x_k}{\partial \eta} \vec{e}_k \quad (130)$$

e

$$g = (g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)^{1/2} = (g_k g_k)^{1/2} \quad (131)$$

$$g_1 = \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \frac{\partial x_3}{\partial \eta} - \frac{\partial x_3}{\partial \xi} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \quad (132)$$

$$g_2 = \frac{\partial x_3}{\partial \xi} \frac{\partial x_1}{\partial \eta} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \frac{\partial x_3}{\partial \eta} \quad (133)$$

$$g_3 = \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \quad (134)$$

As componentes do vetor normal são dadas a partir da Eq. (135).

$$n_k = \frac{g_k}{g} \quad (135)$$

Como estamos lidando com elementos lineares, as derivadas presentes nas equações de g_k , g e n_k podem ser simplificadas da seguinte maneira.

$$x_k = \frac{1}{4} (\xi + \eta) (x_k^{(1)} + x_k^{(2)} + x_k^{(3)} + x_k^{(4)}) \quad (136)$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial \xi} = \frac{(x_k^{(1)} + x_k^{(2)} + x_k^{(3)} + x_k^{(4)})}{4}; \quad \frac{\partial x_k}{\partial \eta} = \frac{(x_k^{(1)} + x_k^{(2)} + x_k^{(3)} + x_k^{(4)})}{4} \quad (137)$$

Com isso, é possível a modelagem da superfície de um objeto composto por elementos de com quatro nós. A equação integral para qualquer posição do ponto fonte d pode ser reescrita de modo a atuar sobre cada elemento individualmente.

$$cT(d) = \int_{\Gamma} T \dot{q}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} T^* \dot{q} d\Gamma = \sum_{E=1}^{NE} \int_{\Gamma_E} T \dot{q}^* d\Gamma - \sum_{E=1}^{NE} \int_{\Gamma_E} T^* \dot{q} d\Gamma \quad (138)$$

Como discutido anteriormente, a solução analítica dos problemas de elementos de contorno são muito dificilmente resolvidos de forma exata. Então se deve encontrar um resultado aproximado utilizando um número finito de elementos de superfície. Para as soluções das integrais da Eq. (138) para um elemento constante genérico, é utilizada a interpolação indicada na Eq. (128) para encontrar um ponto físico no elemento, cujas propriedades o caracterizará. Substituindo as Eqs. (128) e (129) na Eq. (138) obtém-se:

$$\int_{\Gamma_E} T \dot{q}^* d\Gamma = \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \dot{q}^* T^{(E)} g d\xi d\eta \right\}^{(E)} \quad (139)$$

$$\int_{\Gamma_E} T \dot{q}^* d\Gamma = H^{(E)} T^{(E)} \quad (140)$$

e

$$\int_{\Gamma_E} T^* \dot{q} d\Gamma = \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T^* q^{(E)} g d\xi d\eta \right\}^{(E)} \quad (141)$$

$$\int_{\Gamma_E} T^* \dot{q} d\Gamma = G^{(E)} \dot{q}^{(E)} \quad (142)$$

Escrevendo de maneira mais compacta, tem-se:

$$\begin{cases} \int_{\Gamma_E} T \dot{q}^* d\Gamma = H^{(d,E)} T^{(E)} \\ \int_{\Gamma_E} T^* \dot{q} d\Gamma = G^{(d,E)} \dot{q}^{(E)} \end{cases} \quad (143)$$

onde

$$H^{(d,E)} = \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \dot{q}^*(d, x) g(x) d\xi d\eta \right\}^{(E)} \quad (144)$$

$$G^{(d,E)} = \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T^*(d, x) g(x) d\xi d\eta \right\}^{(E)} \quad (145)$$

Finalmente, substituindo essas relações na Eq. (138), obtém-se a equação integral em sua forma final:

$$cT(d) = \sum_{E=1}^{NE} H^{(d,E)} T^{(E)} - \sum_{E=1}^{NE} G^{(d,E)} \dot{q}^{(E)} \quad (146)$$

Como no problema 2D, em cada elemento se conhece uma variável para que seja possível a solução do sistema de equações.

3.5 O MÉTODO DA RECIPROCIDADE DUAL

O método da reciprocidade dual tem como função transformar integrais de domínio em integrais de contorno. Seu uso é vasto na solução de problemas transientes e é muito simples se comparado a outros métodos, dado a sua abrangência. Considere uma equação de Poisson genérica, Eq. (147)

$$\nabla^2 T = b \quad (147)$$

Onde b é uma função que pode depender da posição, do potencial ou do tempo. A solução deste problema é composta da soma da solução particular com solução da homogênea, Eq. (148).

$$T = \hat{T} + \tilde{T} \quad (148)$$

Sendo \hat{T} a solução particular e \tilde{T} a solução homogênea é possível escrever que:

$$\nabla^2 \hat{T} = b \quad (149)$$

O método da reciprocidade dual propõe usar uma série de soluções particulares, \hat{T}_j , ao invés de apenas uma única função \hat{T} . Isso porque em geral é difícil encontrar uma solução que satisfaça a Eq. (149), principalmente em casos não lineares e que dependem do tempo. O número de soluções \hat{T}_j encontradas é igual ao número total de nós do problema, somando os nós no contorno (N) e também os nós internos (L) a este.

Com isso, a Eq. (150) é proposta [9]:

$$b \cong \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \{f_j\} \quad (150)$$

onde α_j são coeficientes desconhecidos inicialmente e f_j são funções de aproximação. A solução particular e a função de aproximação são relacionadas segundo Eq. (151)

$$\nabla^2 \hat{T}_j = \{f_j\} \quad (151)$$

A função de aproximação f_j depende da geometria do problema. Existem várias funções de aproximação possíveis, escolher a mais apropriada faz parte da solução do problema.

Para obter a equação que rege o método são necessárias algumas manipulações matemáticas simples. Substituindo a Eq. (151) na Eq. (150) encontra-se uma equação que define o vetor b . Aplicando esse valor na Eq. (147) obtém-se a Eq. (152).

$$\nabla^2 T = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j (\nabla^2 \hat{T}_j) \quad (152)$$

Em seguida multiplica-se os dois lados da equação pela solução fundamental e integra com relação ao domínio, gerando:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 T) T^* d\Omega = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \int_{\Omega} (\nabla^2 \hat{T}_j) T^* d\Omega \quad (153)$$

Integrando por partes os termos do Laplaciano dos dois lados, a Eq. (154) é obtida, a equação integral do método da reciprocidade dual.

$$c_i T_i + \int_{\Gamma} q^* T d\Gamma - \int_{\Gamma} T^* q d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j (c_i \hat{T}_{ij} + \int_{\Gamma} q^* \hat{T}_j d\Gamma - \int_{\Gamma} T^* \hat{q}_j d\Gamma) \quad (154)$$

Escrevendo a Eq. (154) na forma discretizada e substituindo as integrais pelos termos das matrizes G e H, para um ponto fonte i tem-se:

$$c_i T_i + \sum_{k=1}^N H_{ik} T_k - \sum_{k=1}^N G_{ik} q_k = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(c_i \hat{T}_{ij} + \sum_{k=1}^N H_{ik} \hat{T}_{kj} - \sum_{k=1}^N G_{ik} \hat{q}_{kj} \right) \quad (155)$$

Nesse caso o índice k designa os pontos campo. É possível escrever a Eq. (155) como o seguinte produto matricial:

$$[H]\{T\} - [G]\{q\} = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j ([H]\{\hat{T}_j\} - [G]\{\hat{q}_j\}) \quad (156)$$

Na Equação (156) os termos c_i já estão incorporados à diagonal principal da matriz $[H]$. Considerando os vetores \hat{T}_j e \hat{q}_j sendo uma coluna das matrizes $[\hat{T}]$ e $[\hat{Q}]$, respectivamente, é possível remover o somatório e chegar à configuração da Eq. (157).

$$[H]\{T\} - [G]\{q\} = ([H][\hat{T}] - [G][\hat{Q}])\{\alpha\} \quad (157)$$

3.5.1 Vetor $\{\alpha\}$

Considerando cada coluna da matriz $[F]$ formada por um vetor $\{f_j\}$, tendo a forma de uma matriz quadrada de ordem $(N+L)$, e $\{b\}$ um vetor com os valores da função b_j no ponto j . A partir da Eq. (150), é possível calcular as componentes do vetor α , tendo em vista que os valores de $[F]$ dependem apenas da geometria do problema e é possível encontrar os valores de $\{b\}$.

Com isso, o cálculo do vetor $\{\alpha\}$ pode ser escrito como

$$\{\alpha\} = [F]^{-1}\{b\} \quad (158)$$

onde $[F]^{-1}$ é a inversa da matriz $[F]$.

3.5.2 Funções de aproximação

A solução particular \hat{T} , sua derivada com relação à normal \hat{q} e a correspondente função de aproximação f tem apenas uma limitação, elas devem ser escolhidas de forma que a Eq. (158) não seja singular. Para definir essas funções normalmente se propõe uma expansão para f e em seguida se calcula \hat{T} e \hat{q} usando as Eqs. (151) e (122), respectivamente.

São várias as funções de aproximação propostas, porém as mais utilizadas são as componentes da série [9]:

$$f = 1 + r + r^2 + \dots + r^m \quad (159)$$

É comum utilizar a função [9]:

$$f = 1 + r \quad (160)$$

As funções \hat{T} e \hat{q} , no caso 3D, para essa função são dadas pelas Eqs. (161) e (162)

$$\hat{T} = \frac{r^2}{6} + \frac{r^3}{12} \quad (161)$$

$$\hat{q} = \frac{4 + 3r}{12} \left((x_c - x_f)n_x + (y_c - y_f)n_y + (z_c - z_f)n_z \right) \quad (162)$$

Muitas são as funções de aproximação possíveis, porém algumas apresentam melhores resultados que outras. Além da série apresentada na Eq. (159), também é comum encontrar a adição de algum polinômio $P(x_c, y_c, z_c)$. Com esse polinômio, a Eq. (150) toma a forma:

$$b \cong \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \{f_j\} + P(x_c, y_c, z_c) \quad (163)$$

Nesse trabalho foi implementado o polinômio

$$P = 1 + x + y + z \quad (164)$$

de forma a verificar se a função f utilizada não seria uma possível fonte de erro.

Para a sua implementação é necessário fazer algumas alterações nas matrizes $[F]$, $[\hat{T}]$ e $[\hat{Q}]$. Para esse caso específico são acrescentadas algumas linhas e colunas cujo cálculo de seus elementos é feito de modo diferenciado segundo as equações (165) e (166) [10].

$$\hat{T}^1 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{6}; \hat{T}^x = \frac{x^3}{6}; \hat{T}^y = \frac{y^3}{6}; \hat{T}^z = \frac{z^3}{6} \quad (165)$$

$$\hat{q}^1 = \frac{-k(xn_x + yn_y + zn_z)}{3}; \hat{q}^x = \frac{-kn_x x^2}{2}; \hat{q}^y = \frac{-kn_y y^2}{2}; \hat{q}^z = \frac{-kn_z z^2}{2} \quad (166)$$

Com isso, as matrizes $[F]$, $[\hat{T}]$ e $[\hat{Q}]$ tomam a forma das Eqs. (167), (168) e (169) [11].

$$[F] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1(N+L)} & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2(N+L)} & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{N+L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{N+L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_{N+L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (167)$$

$$[\hat{T}] = \begin{bmatrix} \hat{T}_{11} & \hat{T}_{12} & \dots & \hat{T}_{1(N+L)} & \hat{T}_1^x & \hat{T}_1^y & \hat{T}_1^z & \hat{T}_1^1 \\ \hat{T}_{21} & \hat{T}_{22} & \dots & \hat{T}_{2(N+L)} & \hat{T}_2^x & \hat{T}_2^y & \hat{T}_2^z & \hat{T}_2^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{T}_{(N+L)1} & \hat{T}_{(N+L)2} & \dots & \hat{T}_{(N+L)(N+L)} & \hat{T}_{(N+L)}^x & \hat{T}_{(N+L)}^y & \hat{T}_{(N+L)}^z & \hat{T}_{(N+L)}^1 \end{bmatrix} \quad (168)$$

$$[\hat{Q}] = \begin{bmatrix} \hat{q}_{11} & \hat{q}_{12} & \dots & \hat{q}_{1(N+L)} & \hat{q}_1^x & \hat{q}_1^y & \hat{q}_1^z & \hat{q}_1^1 \\ \hat{q}_{21} & \hat{q}_{22} & \dots & \hat{q}_{2(N+L)} & \hat{q}_2^x & \hat{q}_2^y & \hat{q}_2^z & \hat{q}_2^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{q}_{(N+L)1} & \hat{q}_{(N+L)2} & \dots & \hat{q}_{(N+L)(N+L)} & \hat{q}_{(N+L)}^x & \hat{q}_{(N+L)}^y & \hat{q}_{(N+L)}^z & \hat{q}_{(N+L)}^1 \end{bmatrix} \quad (169)$$

Para que a Eq. (158) seja verdadeira é necessário adicionar também algumas linhas no vetor $\{b\}$, como mostra a Eq. (170).

$$\{b\} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (170)$$

3.5.3 A equação da difusão

A equação que governa os problemas de difusão é a Eq. (171). Para que a definição desse tipo de problema seja completa, além das condições de contorno, é necessário estabelecer as condições iniciais ($T_0(x, y, z)$).

$$\nabla^2 T = \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (171)$$

A função b agora depende da constante $1/k$, para facilitar as manipulações esse termo é retirado e adicionado à Eq. (157), tornando-se assim:

$$[H]\{T\} - [G]\{q\} = \frac{1}{k} ([H][\hat{T}] - [G][\hat{Q}])\{\alpha\} \quad (172)$$

Com isso, a partir da Eq. (158) tem-se que a expressão do vetor $\{\alpha\}$ é

$$\{\alpha\} = [F]^{-1}\{\dot{T}\} \quad (173)$$

sendo $\{\dot{T}\}$ o vetor que contém as derivadas temporais da temperatura.

Substituindo na Eq. (172):

$$[H]\{T\} - [G]\{q\} = \frac{1}{k}([H][\hat{T}] - [G][\hat{Q}])[F]^{-1}\{\dot{T}\} \quad (174)$$

Para facilitar a visualização, é comum definir a matriz $[S]$, cuja expressão é

$$[S] = ([H][\hat{T}] - [G][\hat{Q}]) \quad (175)$$

e o termo que multiplica $\{\dot{T}\}$ é conhecido como capacidade calorífica, cuja expressão é dada pela Eq. (176).

$$[C] = -\frac{1}{k}[S] = -\frac{1}{k}([H][\hat{T}] - [G][\hat{Q}])[F]^{-1} \quad (176)$$

Dessa forma a Eq. (174) pode ser reescrita na forma:

$$[C]\{\dot{T}\} + [H]\{T\} = [G]\{q\} \quad (177)$$

A partir daí qualquer método de integração temporal pode ser usado para encontrar uma solução para o sistema acima. Por simplicidade foi adotada uma aproximação linear para a variação de T e q em cada passo de tempo na forma

$$T = (1 - \theta_u)T^m + \theta_T T^{m+1} \quad (178)$$

$$q = (1 - \theta_q)q^m + \theta_q q^{m+1} \quad (179)$$

$$\dot{T} = \frac{1}{\Delta t}(T^{m+1} - T^m) \quad (180)$$

onde θ_T e θ_q são parâmetros que posicionam os valores de T e q , respectivamente, entre os níveis de tempo m e $m + 1$. Uma série de testes realizados indicam que, no geral, uma boa aproximação é dada quando os valores de θ_T e θ_q são iguais a 0,5 e 1,0, respectivamente¹. Com isso pode-se reorganizar a Eq. (177) na forma:

$$\left(\frac{2}{\Delta t}[C] + [H]\right)\{T\}^{m+1} - 2[G]\{q\}^{m+1} = \left(\frac{2}{\Delta t}[C] - [H]\right)\{T\}^m \quad (181)$$

Dessa equação observa-se que o seu lado direito tem os valores de temperatura do momento anterior, ou seja, já são conhecidos. Já o lado esquerdo tem os valores das condições de contorno e os que necessitam ser obtidos. Como os vetores $\{T\}$ e $\{q\}$ contam com os pontos internos, a condição de contorno desses pontos é $q = 0$.

¹ Segundo Partridge, P. W. e Brebbia, C. A. (1990, apud Partridge, P. W., Brebbia, C. A. e Wrobel, L. C., **The dual reciprocity boundary element method**, 1991, p. 177)

A partir da Eq. (177), resolvendo-a sucessivamente, é possível então conseguir os valores das temperaturas em cada um dos passos de tempo. A partir daí as outras funções do programa tem apenas a função de representar os dados obtidos de *output*.

4 LISTAGEM DOS CÓDIGOS

4.1 CÓDIGO PERMANENTE (ANEXO II)

O fluxograma do programa *Pot_const3D.m* está representado pela Fig. 23

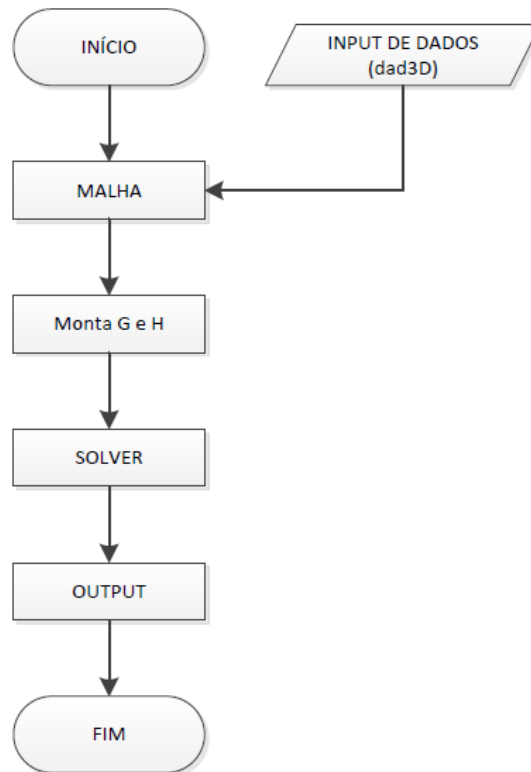


Figura 23. Fluxograma do programa *Pot_const3D.m*

Esse programa não usa o método da Reciprocidade Dual, porém um programa que tem a mesma finalidade foi criado no método DRM para verificar se a construção das matrizes estavam corretas.

4.1.1 Input de dados

O arquivo de entrada tem como prefixo *dad3D*. O primeiro passo no mesmo é escolher o tipo da malha, que pode ser *'parede'* ou *'cil_vaz'* (cilindro vazado). Em seguida é necessário determinar as dimensões do objeto no vetor *geom*, no caso da parede a largura, espessura e altura, e no caso do cilindro os raios interno e externo e sua altura.

Na sequência é necessário escolher o número de divisões da malha, para que no processamento dos dados sejam criados os elementos. Após feito isso, adicionam-se as condições de contorno para cada face, nos casos onde existem duas ou mais condições de contorno em uma mesma face é necessário criar uma função *corrige_CDC.m*.

Então escolhe-se a fonte concentrada, determinada pelo vetor fc . Esse vetor apenas determina um ponto fonte, para o caso de linhas fonte ou mais de um pontos fonte são necessárias algumas alterações no programa e/ou criar algumas funções de correção, porém nada muito diferente do que será explicado na Seção 5.3.3 .

O vetor *pontos_int* tem por finalidade a determinação da quantidade de pontos internos que serão gerados. Por último determina-se a constante do material k . Para fazer uma simulação só são necessárias alterações nesse arquivo, mais detalhes encontram-se comentados no próprio programa. Em seguida os dados vão para o programa *MALHA.m* para serem formatados, porém não será explicado esse programa, já que este funciona apenas com relações geométricas extremamente simples.

4.1.2 Montagem e H. (ANEXO III)

Nessa função são calculadas as matrizes $[G]$, $[H]$ e $[VF]$. Na matriz $[VF]$ encontram-se os fatores de visão dos elementos (só é utilizado no caso do cilindro vazado), sendo os elementos $VF_{ij} = F_{i \rightarrow j}$ e os dois últimos elementos de cada coluna são os fatores de visão com relação às aberturas superior e inferior. É também aí que o ponto fonte é levado para o contorno através da integração radial.

Essa função primeiro percorre os pontos fonte, calculando em seguida todos os parâmetros com relação aos pontos campo. Primeiramente são calculados os termos da matriz VF a partir da função *calc_VF.m*, que foi aproveitada do programa *vfac.m*², mostrado na Fig. 24 que utiliza o método CDIF. São necessários como input apenas as coordenadas de cada nó geométrico dos elementos.

Em seguida calculam-se os termos das matrizes $[G]$ e $[H]$, caso forem singulares (*calc_gsing.m*) ou não singulares (*calc_ghnsing.m*). Como dito anteriormente as funções que calculam esses valores usam integração numérica e são responsáveis pela maior parte do processamento do programa.

Por fim o ponto fonte é levado para o contorno por meio da integração radial com a função *calc_q.m*. Dentro da função *monta_GeH.m* o vetor resultante dessa função é chamado de $\{q\}$, fora da função é chamado de $\{g\}$ para não se confundir com o vetor resultante com as respostas de fluxo de calor.

² Programa desenvolvido por Nicolas Lauzier com a colaboração de Daniel Rousse na Université Laval, 2004.

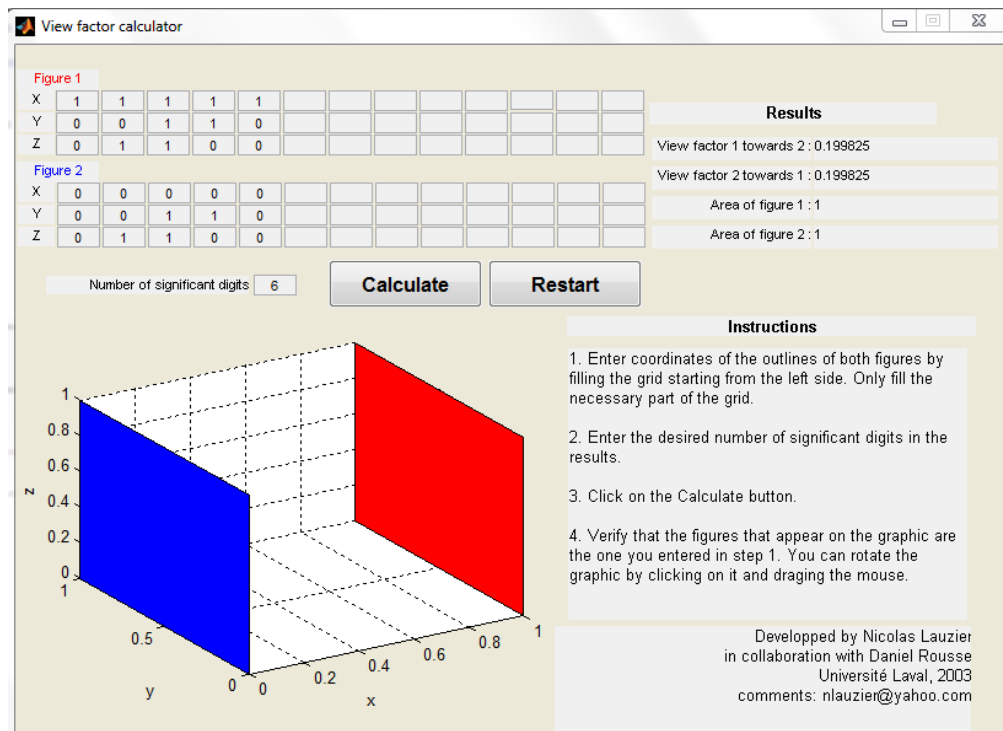


Figura 24. Imagem do programa *vfac.m*

4.1.3 Solver (ANEXO IV)

O solver gira em torno da função *fsolve*, já disponível na biblioteca do MATLAB. A função *fsolve* resolve numericamente sistemas de equações não lineares, resultantes da condição de contorno de radiação. Para executá-la é necessário apenas uma estimativa inicial e aplicar as condições de contorno, que podem ser apenas um valor ou uma relação entre o fluxo de calor e a temperatura.

A Equação (125) é resolvida com a aplicação das condições de contorno (ANEXO V). Após a obtenção de todas as incógnitas é necessário organizá-las a partir da função *Monta_Teq.m*. A partir desse ponto falta apenas plotar a distribuição de temperatura.

4.2 CÓDIGO TRANSIENTE (ANEXO VI)

O fluxograma do programa *Dif_const3D.m* está representado pela Fig. 25.

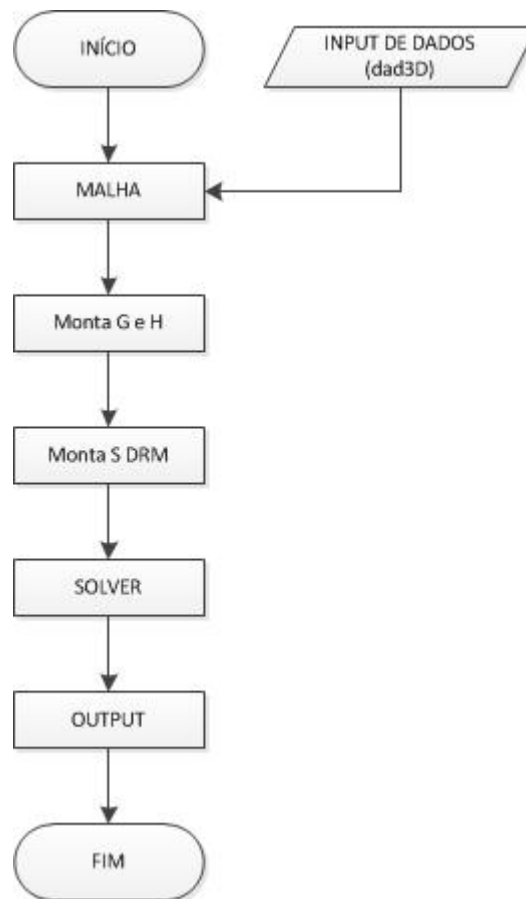


Figura 25. Fluxograma do programa *Pot_const3D.m*

Esse programa resolve problemas de difusão, que tem como equação governante a Eq. (171), utilizando o método da reciprocidade dual. Nesse programa existe algum erro que ainda não foi identificado, porém será explicado como este programa foi construído. Nessa seção serão mostradas as funções mais importantes para esse programa.

4.2.1 Input de dados

O arquivo de entrada é praticamente o mesmo arquivo do programa *Pot_const3D.m*. A única diferença é que nesse caso é necessário colocar a temperatura inicial, qual será o tempo final da simulação e quantos serão os passos de tempo.

4.2.2 Monta G e H (ANEXO VII)

Com o uso do método da reciprocidade dual as matrizes $[G]$ e $[H]$ aumentam seu tamanho para uma matriz quadrada de ordem $N + L$. Os termos onde o ponto fonte pertence ao contorno e um ponto interno é o ponto campo são calculados normalmente. Já no caso contrário, tanto na matriz $[G]$ quanto na matriz $[H]$ são iguais a zero. E quando o ponto fonte e o ponto campo são pontos internos os termos de $[G]$ são todos iguais a zero e na matriz $[H]$ somente H_{ii} é igual a -1.

4.2.3 Monta S DRM (ANEXO VIII)

Essa função cria as matrizes $[F]$, $[\hat{Q}]$ e $[\hat{T}]$ para o uso do método da reciprocidade dual. Como mostrado anteriormente, as equações de $[\hat{Q}]$ e $[\hat{T}]$ dependem da função de aproximação escolhida.

A função primeiro percorre os pontos de reciprocidade dual, calculando f , \hat{T} e \hat{Q} com relação a todos os outros pontos, incluindo pontos internos e do contorno. Já que esses parâmetros dependem apenas da geometria do problema, seu cálculo é extremamente simples. Por fim é calculada a matriz $[S]$ a partir da Eq. (175), e a partir desses parâmetros é possível aplicar o método.

4.2.4 Solver (ANEXO IX e ANEXO X)

Para a equação de difusão o solver é utilizado a cada passo de tempo. Foi criado um com função *fsolve* exatamente como mostrado no programa *Pot_const3D.m*, mudando apenas a equação a ser resolvida, mas devido à simplicidade de manipulação e aos problemas que o programa apresentou, o solver utilizado é o mais simples possível, isolando as variáveis (funcionando apenas para condições de contorno de temperatura e fluxo de calor).

Para resolver esse caso é necessário deixar a equação integral na forma

$$[A]\{x\} = \{B\} \quad (182)$$

onde a matriz $[A]$ e o vetor $\{B\}$ têm valores conhecidos e o vetor $\{x\}$ tem todas as incógnitas do problema.

Nesse caso, ao invés de separar os termos da matriz $[H]$ separam-se os termos da matriz $[H_2]$, que é o termo que multiplica a temperatura no instante $m + 1$ na equação integral. E ao invés de separar os termos de $[G]$, separam-se os termos de $2G$ pelo mesmo motivo.

$$[H_2] = [H] + \frac{2}{\Delta t}[C] \quad (183)$$

Após incorporar os termos à matriz A e criar o vetor $\{B\}$, soma-se a $\{B\}$ o vetor $\{b_2\}$, que é proveniente do lado direito da Eq. (181). Como a temperatura de todos os elementos é conhecida no instante m é então possível calcular $\{b_2\}$ a partir da Eq. (184).

$$\{b_2\} = \left(\frac{2}{\Delta t} [C] - [H] \right) \{T\}^m \quad (184)$$

O vetor b_2 é calculado a cada passo de tempo, antes de resolver o sistema de equações representado pela Eq. (182). A partir daí é necessário distribuir os resultados presentes no vetor $\{x\}$ para os vetores $\{T\}$ e $\{q\}$ pela função *Monta_Teq.m*.

5 IMPLEMENTAÇÃO

Toda a implementação partiu de um programa capaz de simular geometrias 3D com condições de contorno de temperatura e fluxo (normal à superfície do elemento). Para verificar se as alterações no programa estavam corretas foram desenvolvidas soluções analíticas de casos simples e, quando possível, comparados com resultados presentes na literatura.

5.1 VALIDAÇÃO DO PROGRAMA 2D

Para a validação simulou-se o problema descrito pela Fig. 26, presente na referência [9]. Nesse exercício uma das condições de contorno é a convecção, com um coeficiente $h = 10 \text{ W/m}^2\text{°C}$ e temperatura ambiente $T_{amb} = 500 \text{ °C}$.

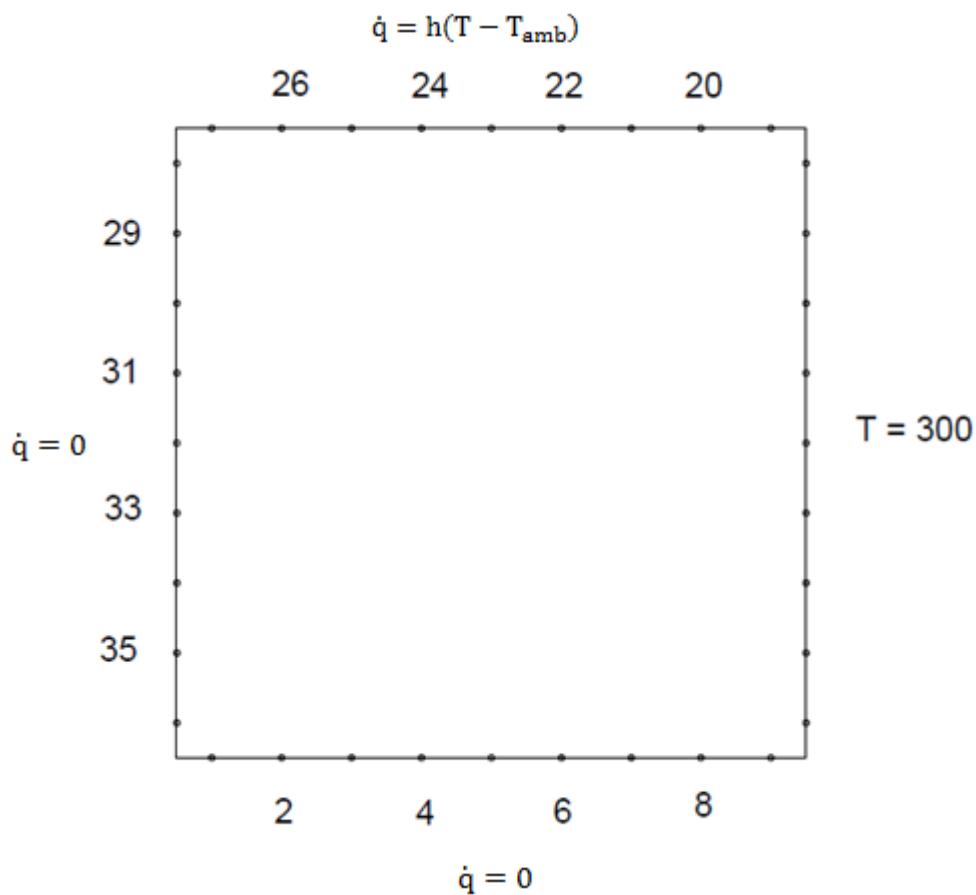


Figura 26. Geometria e condições de contorno do problema

A Tabela 2 compara os resultados da solução da referência [9] e do programa criado. Como é observado, o erro máximo é de 0,03%, o que nos dá a segurança de dizer que o código

funciona para as três condições de contorno utilizadas. A Figura 27 nos mostra a distribuição de temperatura presente na solução.

Tabela 2. Comparação dos resultados da simulação 2D obtidos com os presentes na referência [9]

Nó	Temperatura Patridge (°C)	Temperatura Programa (°C)	Erro Relativo (%)
2	385,12	384,99	0,03
4	372,98	372,93	0,01
6	351,83	351,90	0,02
8	323,48	323,72	0,07
20	442,50	442,39	0,02
22	469,57	469,45	0,03
24	478,68	478,60	0,02
26	482,30	482,23	0,01
29	455,84	455,60	0,05
31	424,88	424,71	0,04
33	402,82	402,70	0,03
35	390,57	390,46	0,03

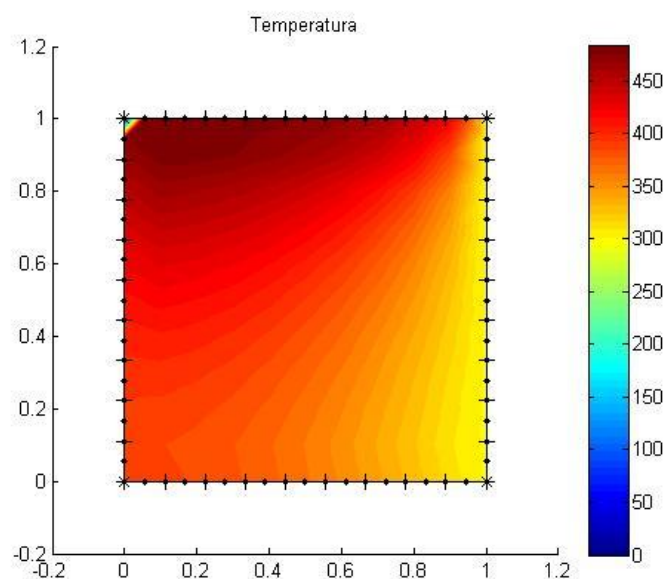


Figura 27. Distribuição de temperatura obtida na simulação

5.2 VALIDAÇÃO DAS MALHAS 3D

Para realizar a simulação desejada é necessária uma malha superficial de um cilindro vasado, Fig. 28 (a). Devido à maior facilidade na construção de soluções analíticas foi também desenvolvido um gerador de malhas de paredes, Fig. 28 (b). Essas geometrias são criadas a

partir de relações geométricas simples, tomando sempre cuidado de deixar os vetores normais apontando para fora do corpo.

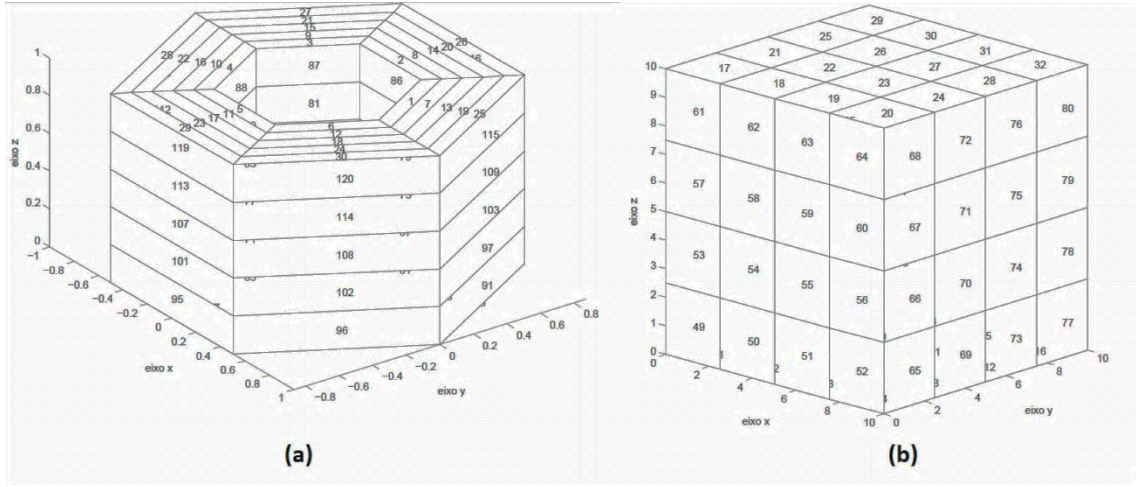


Figura 28. (a) Malha de um cilindro vazado. (b) Malha de uma parede reta

Para que facilitar e garantir com certeza a validade da malha foram analisados dois casos, cada um simulando um problema plano. Para isso as condições de contorno de duas faces opostas deve ter fluxo de calor igual a zero ($\dot{q} = 0 \text{ W/m}^2$), e as demais condições de contorno iguais à do problema 2D da seção plana paralela a essas duas faces de fluxo zero.

Caso 1: Fluxo axial de calor.

Nesse caso, as condições de contorno foram:

- Fluxo de calor nulo nas superfícies interna e externa do cilindro ($\dot{q}_{int} = \dot{q}_{ext} = 0 \text{ W/m}^2$);
- Temperatura igual a 1 na superfície superior do cilindro ($T_{sup} = 1 \text{ }^\circ\text{C}$);
- Temperatura igual a 0 na superfície inferior do cilindro ($T_{inf} = 0 \text{ }^\circ\text{C}$).

Sabendo que a Eq. (46) rege um sistema em regime permanente sem geração de calor em coordenadas cartesianas, e sendo o fluxo somente em uma direção:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (185)$$

Integrando duas vezes obtém-se:

$$T(z) = C_1 z + C_2 \quad (186)$$

Aplicando as condições de contorno, a solução analítica para esse caso é:

$$T(z) = \frac{z}{h}(T_{sup} - T_{inf}) + T_{inf} \quad (187)$$

Simulando um cilindro de raio interno igual a 0,5 m, raio externo igual a 1 m, e altura igual a 1 m foi obtida a Tab. 3:

Tabela 3. Comparação entre a solução analítica e a solução numérica do fluxo de calor axial

Altura (m)	Solução Numérica (°C)	Solução Analítica (°C)	Erro Relativo (%)
0,05	0,0492	0,0500	1,60
0,15	0,1531	0,1500	2,07
0,25	0,2567	0,2500	2,68
0,35	0,3598	0,3500	2,80
0,45	0,4624	0,4500	2,76
0,55	0,5642	0,5500	2,58
0,65	0,6652	0,6500	2,34
0,75	0,7651	0,7500	2,01
0,85	0,8643	0,8500	1,68
0,95	0,9445	0,9500	0,58

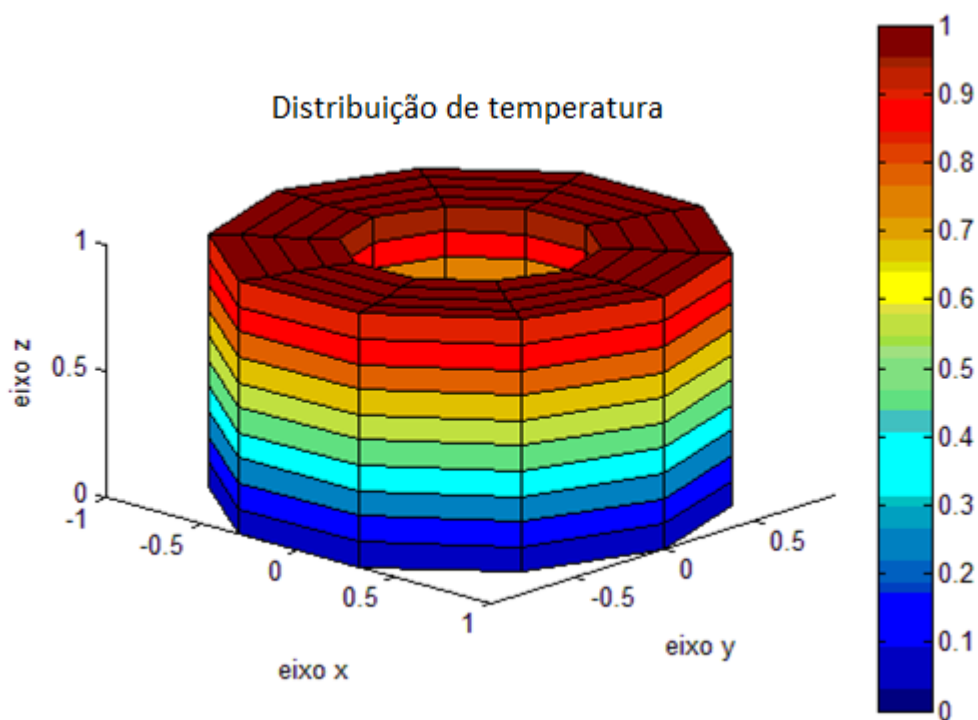


Figura 29. Distribuição de temperatura em um cilindro obtida para o fluxo de calor axial

Com um erro relativo máximo de 2,8% é possível agora afirmar que a simulação está correta, a Fig. 29 confirma esse resultado. Um estudo sobre o refino da malha se faz necessário, poucos elementos angulares fazem com que o erro aumente de forma drástica, causado pela forma do elemento, e são necessários vários elementos na altura do cilindro para garantir maior precisão.

Essa mesma simulação pode ser feita com a malha de parede (em formato de cubo), colocando uma face com temperatura igual a zero, a face oposta com temperatura igual a 1, e o fluxo de calor nas demais iguais a zero. Nesse caso o erro relativo máximo foi menor que 1,0% e a simulação está ilustrado na Fig. 30.

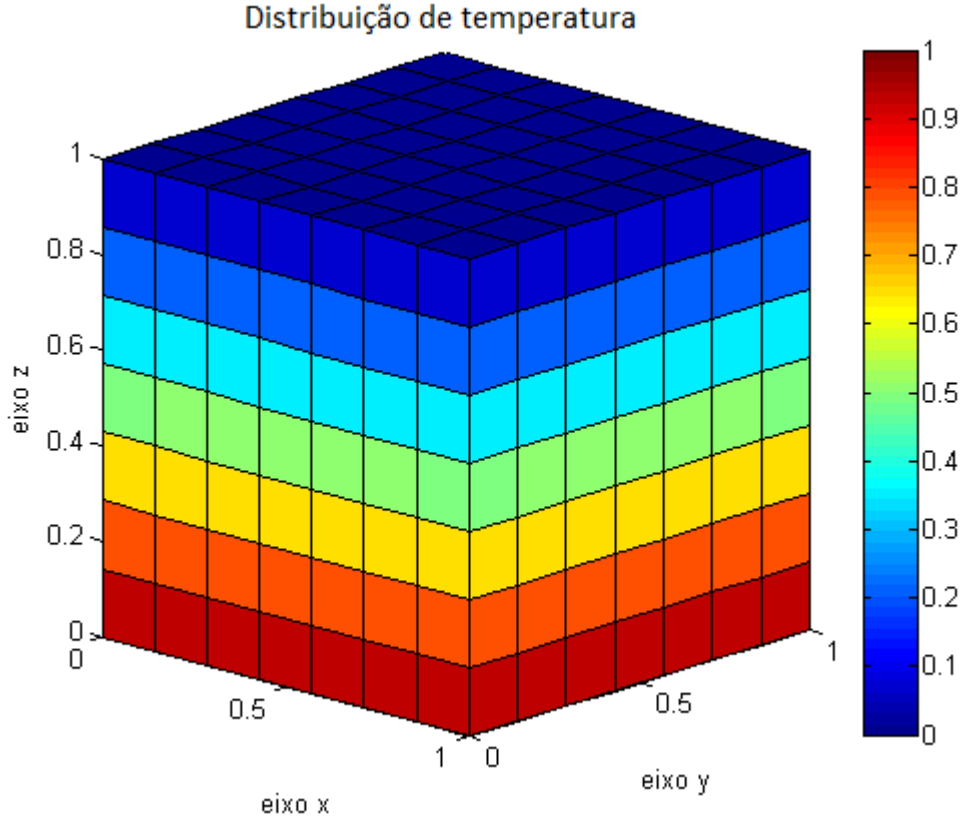


Figura 30. Distribuição de temperatura em um cubo obtida para o fluxo de calor unidirecional

Caso 2: Fluxo radial de calor.

Nesse caso, as condições de contorno foram:

- Fluxo de calor nulo nas superfícies superior e inferior do cilindro $\left(\dot{q}_{sup} = \dot{q}_{inf} = 0 \text{ W/m}^2\right)$;
- Temperatura igual a 1 na superfície interna do cilindro ($T_{int} = 1 \text{ }^\circ\text{C}$);
- Temperatura igual a 0 na superfície externa do cilindro ($T_{ext} = 0 \text{ }^\circ\text{C}$).

Sabendo que a Eq. (49) rege um sistema em regime permanente sem geração de calor em coordenadas polares e integrando duas vezes em relação a r , é obtida a Eq. (188) aplicando as condições de contorno.

$$T(r) = \frac{T_{int} \ln \frac{r_2}{r} - T_{ext} \ln \frac{r_1}{r}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (188)$$

Simulando um cilindro de raio interno igual a 1 m, raio externo igual a 5 m, e altura igual a 5 m obtém-se a Tab. 4.

Tabela 4. Comparação entre a solução analítica e a solução numérica do fluxo de calor radial

Raio (m)	Solução Numérica (°C)	Solução Analítica (°C)	Erro Relativo (%)
1,22	0,8771	0,8753	0,21
1,67	0,6855	0,6826	0,42
2,11	0,5379	0,5357	0,41
2,56	0,4186	0,417	0,38
3,00	0,3185	0,3174	0,35
3,44	0,2321	0,2316	0,22
3,89	0,1561	0,1562	0,06
4,33	0,088	0,0889	1,01
4,78	0,0278	0,0282	1,42

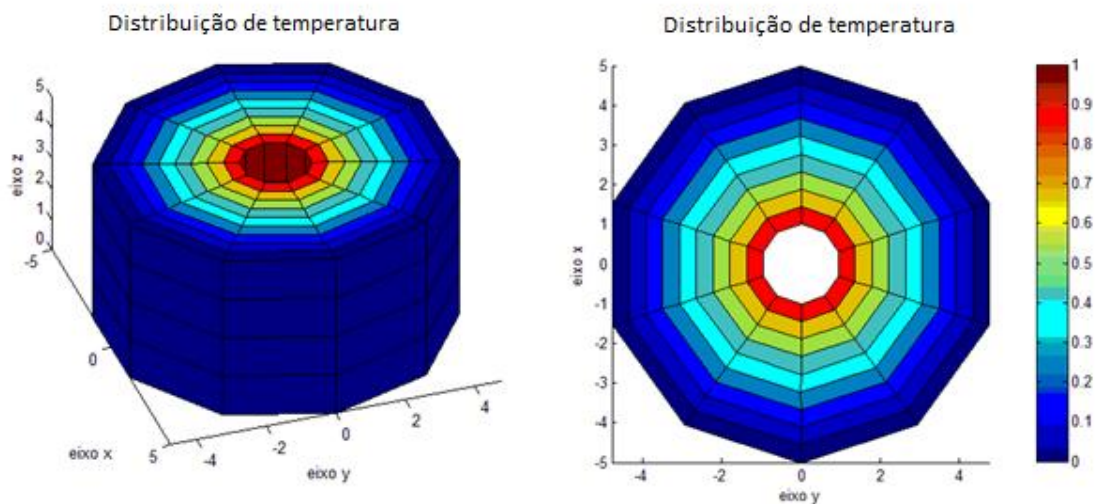


Figura 31. Distribuição de temperatura em um cilindro obtida para o fluxo de calor radial

Com um erro máximo de 1,42%, sua validade é confirmada pela Fig. 31. A partir dessas simulações é possível afirmar que as normais da malha estão apontadas para as direções corretas.

5.3 IMPLEMENTAÇÃO PROGRAMA 3D

5.3.1 Condição de contorno de convecção

É comum problemas de transferência de calor com condições de contorno de convecção. Para implementar este caso existem duas maneiras possíveis [3]. A primeira é isolar o sistema de equações representado pela Eq. (83) na forma:

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (189)$$

Onde apenas no vetor $\{x\}$ estão as variáveis isoladas. Nessa forma é possível resolver sem a necessidade de um método iterativo. Para isto, sabendo que a convecção se comporta linearmente, segundo Eq.(190) [7], é possível alterar uma coluna da matriz $[A]$ e um elemento do vetor $\{b\}$ para resolver este problema. Exemplificando, para um elemento k cuja condição de contorno é a convecção, e j variando de 1 ao número de elementos do objeto (n), tem-se:

$$\dot{q}_k = h(T_k - T_{amb}) \quad (190)$$

$$\begin{aligned} H_{j1}T_1 + H_{j2}T_2 + \dots + H_{jk}T_k + \dots + H_{jn}T_n \\ = G_{j1}\dot{q}_1 + G_{j2}\dot{q}_2 + \dots + G_{jk}h(T_k - T_{amb}) + \dots + G_{jn}\dot{q}_n \end{aligned} \quad (191)$$

Manipulando para o formato descrito na Eq. (189).

$$\begin{aligned} H_{j1}T_1 + H_{j2}T_2 + \dots + (H_{jk} - G_{jk}h)T_k + \dots + H_{jn}T_n \\ = G_{j1}\dot{q}_1 + G_{j2}\dot{q}_2 + \dots + G_{jk}(-hT_{amb}) + \dots + G_{jn}\dot{q}_n \end{aligned} \quad (192)$$

Primeiramente a implementação foi feita dessa maneira, porém não é possível resolver para condições de contorno onde o fluxo não varia linearmente com a temperatura. Com o auxílio da função *fsolve*, disponível no *Matlab*, é possível resolver o sistema não linear de forma iterativa, dando exatamente os mesmos resultados.

Ao implementar essa função, para validá-la, foi simulado o mesmo problema representado pela Fig. 26. Lembrando que, ao colocar duas superfícies opostas com fluxo de calor iguais a zero o problema se comporta como se fosse bidimensional.

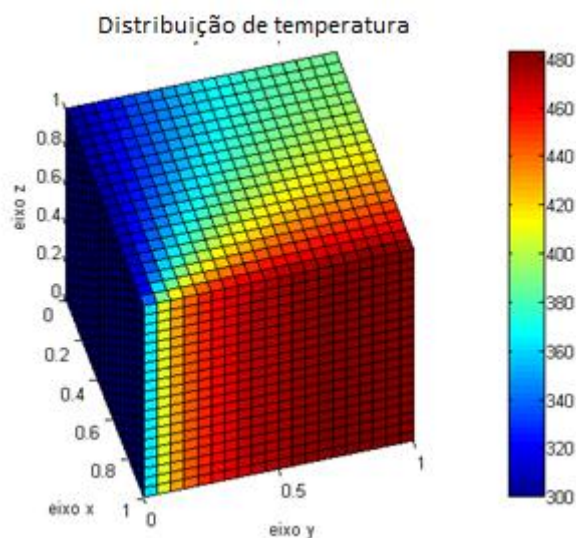


Figura 32. Distribuição de temperatura em um cubo com condição de contorno de convecção

Tabela 5. Comparação dos resultados da simulação 3D obtidos com os presentes na referência [9]

Nó	Temperatura Patridge (°C)	Temperatura Programa (°C)	Erro Relativo (%)
2	385,12	384,82	0,08
4	372,98	372,70	0,07
6	351,83	351,58	0,07
8	323,48	323,29	0,06
20	442,50	442,28	0,05
22	469,57	469,48	0,02
24	478,68	478,64	0,01
26	482,30	482,25	0,01
29	455,84	439,29	3,63
31	424,88	412,47	2,92
33	402,82	395,20	1,89
35	390,57	387,79	0,71

Com um erro máximo de 3,63 % o código foi validado. Mesmo essa condição de contorno sendo mais simples, pelo método iterativo a implementação de outras condições de contorno é semelhante, já que não é mais necessário isolar as variáveis.

5.3.2 Condição de contorno de radiação

Um problema com condição de contorno de radiação, como dito anteriormente, não pode simplesmente ser resolvido isolando variáveis. A radiação de um corpo para um meio infinito é descrito por [7]:

$$\dot{q}_k = \sigma \varepsilon (T_k^4 - T_\infty^4) \quad (193)$$

A implementação no programa é idêntica, mas agora no lado direito da equação existe a temperatura elevada à quarta potência. Para a validação do programa foi desenvolvida uma solução analítica 2D e simulado no programa, considerando duas faces opostas com fluxo de calor igual a zero, como mostra a Fig. 33

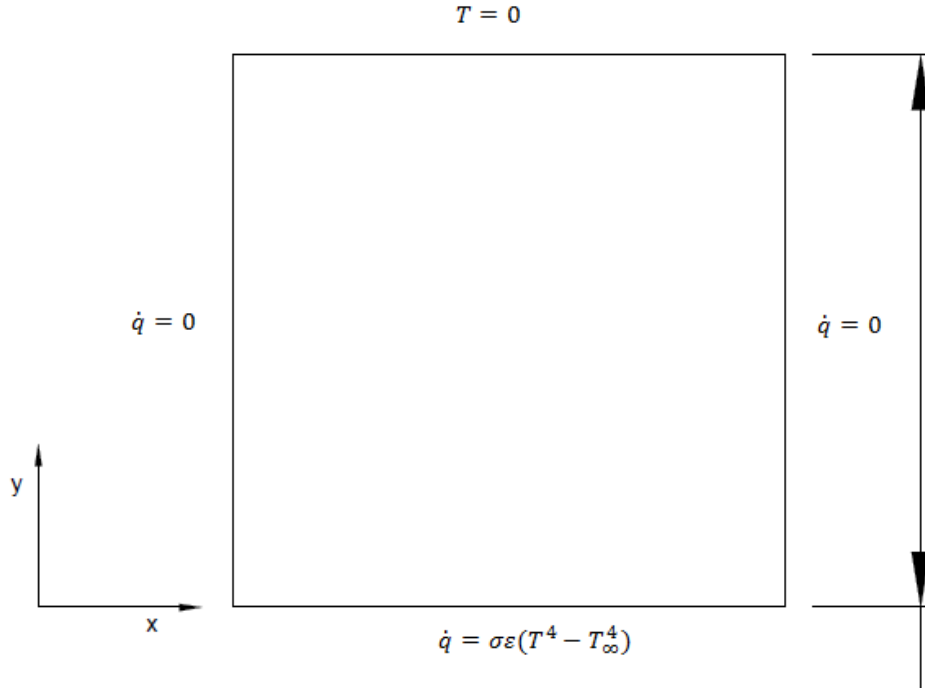


Figura 33. Geometria e condições de contorno do problema

Os dados da simulação foram:

- Temperatura no infinito igual a 100 °C ($T_\infty = 100 \text{ °C}$);
- Temperatura no lado oposto igual a 0 °C ($T = 0 \text{ °C}$);
- Ausência de fluxo de calor nas superfícies laterais ($\dot{q} = 0 \text{ W/m}^2$);
- Emissividade do material igual a 1 ($\varepsilon = 1$);
- Condutividade térmica do material unitária ($k = 1 \text{ W/m.K}$);
- Constante de Stefan-Boltzmann igual a $5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$

Utilizando a equação de Laplace e as condições de contorno, a solução analítica para a temperatura na direção y é:

$$T(y) = 5,67(1 - y) \quad (194)$$

A Tabela 6 compara os resultados da simulação com a solução analítica, a Fig. 34 mostra o mapa de cor da temperatura na superfície do cubo.

Tabela 6. Comparação dos resultados da simulação 3D com condição de contorno de radiação

Posição em y	Temperatura numérica (°C)	Temperatura analítica (°C)	Erro Relativo (%)
0,05	5,33	5,39	0,97
0,15	4,77	4,82	0,95
0,25	4,21	4,25	0,97
0,35	3,65	3,69	1,01
0,45	3,09	3,12	1,06
0,55	2,52	2,55	1,14
0,65	1,96	1,98	1,27
0,75	1,40	1,42	1,53
0,85	0,83	0,85	2,22
0,95	0,26	0,28	6,70

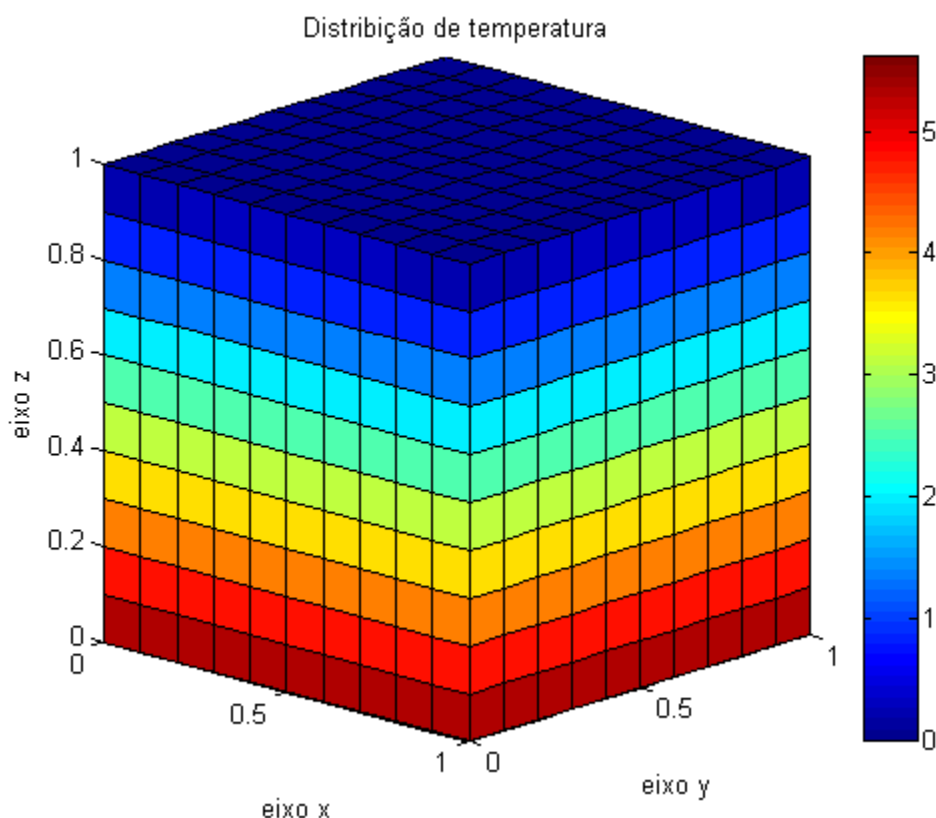


Figura 34. Distribuição de temperatura em um cubo com condição de contorno de radiação

Com um erro máximo de 6,70 % é possível afirmar com segurança que o programa dá uma boa aproximação. Há ainda a necessidade de implementar os fatores de forma, considerar a

porcentagem da energia irradiada para o próprio corpo e para o meio externo. Um equacionamento dos fatores de forma para a simulação da parte interna do cilindro vasado será desenvolvido futuramente, mas há o risco de aumentar muito a complexidade do problema, necessitando de algumas considerações para viabilizar sua implementação.

5.3.3 Fontes concentradas de calor

Além das condições de contorno, a presença fontes concentradas de calor são recorrentes em problemas de transferência de calor. O inconveniente das fontes concentradas de calor é que estas estão presentes no domínio, e não no contorno. Para a solução deste problema usa-se o método da integração radial. A equação que descreve o fenômeno é a equação de Poisson, que tem forma:

$$\nabla^2 T = f(x, y, z) \quad (195)$$

Onde $f(x, y, z)$ é a função de geração de calor. A fim de obter a equação integral de contorno, segue:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 T \, d\Omega - \int_{\Omega} f(x, y, z) \, d\Omega = 0 \quad (196)$$

Que resulta em:

$$cT(d) = \int_S T \vec{q}^* \cdot \vec{n} \, dS - \int_S T^* \vec{q} \cdot \vec{n} \, dS + \int_{\Omega} T^* f(x, y, z) \, d\Omega \quad (197)$$

Aplicando o método da integração radial só restam integrais de contorno, tornando possível transformar a equação integral em um sistema de equações, como visto anteriormente.

$$cT(d) = \int_S T \vec{q}^* \cdot \vec{n} \, dS - \int_S T^* \vec{q} \cdot \vec{n} \, dS + \int_S T^* f(x, y, z) \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r} \, dS \quad (198)$$

A partir da Eq. (198) é possível inserir diversos tipos de fonte de calor. A fonte de calor mais simples é o ponto fonte, cuja função que o descreve é a delta de Dirac. A Fig. 35 representa um cubo com um ponto fonte unitário no centro da face superior. O fluxo de calor na face superior e inferior são iguais a zero, e as demais faces tem temperatura igual a zero.

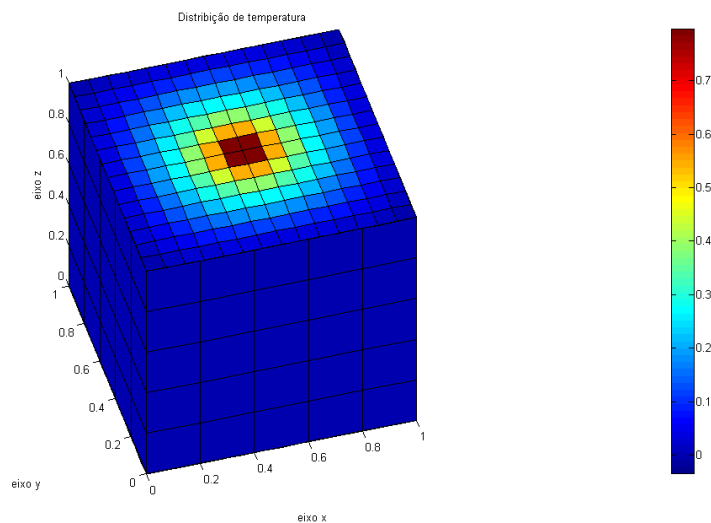


Figura 35. Distribuição de temperatura em um cubo com um ponto fonte centralizado na face superior

Olhando apenas a Fig. 35 é possível verificar que a implementação do ponto fonte está coerente. Mesmo assim isso ainda não é suficiente para validar, ainda se faz necessário desenvolver uma solução analítica e comparar os resultados.

5.4 PROGRAMA TRANSIENTE

Mesmo o programa tendo sido revisado exaustivamente, algum erro de cálculo ainda persiste. Para demonstrar o problema foi realizada uma simulação simples, um corpo quadrado de lado 10 m com temperatura inicial igual a 10 °C sofre um choque térmico onde todas as suas faces ficam com uma temperatura de 0 °C. A Figura 36 mostra o comportamento da temperatura no ponto central feito pelo programa *Difusão.m*, que funciona para casos 2D.

Simulando o mesmo caso no programa 3D obtém-se a Fig 37. O caso descrito acima foi um dos que obteve o erro mais sutil no ponto central, por isso foi utilizado para exemplificar o erro. Em todas as simulações algum ponto chega a temperaturas ou muito altas, ou muito baixas.

Observando ambos os gráficos verifica-se que no início existe uma certa dificuldade de convergência em ambos os casos, porém com intensidades diferentes. A partir dos 2 segundos iniciais a temperatura se comporta como o esperado, indicando que o programa está certo até certo ponto.

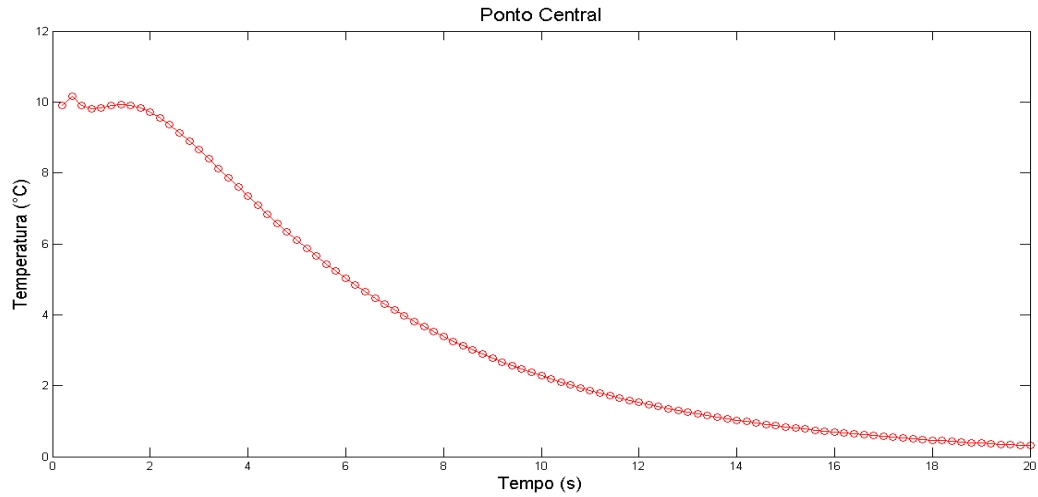


Figura 36. Variação da temperatura ao longo do tempo no programa *Difusao.m*

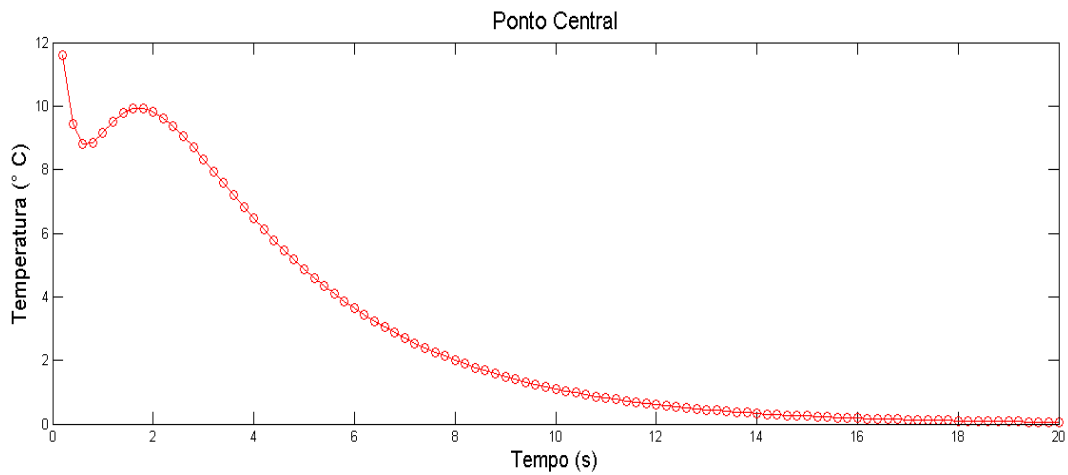


Figura 37. Variação da temperatura ao longo do tempo no programa *Dif_const3D.m*

Para tentar encontrar o problema foram abordadas diversas estratégias. Essas estratégias estão representadas a seguir.

- I. **Verificação de erros de cálculo:** Essa verificação foi feita com o auxílio da integração radial. Ao simular um caso com geração de calor constante no domínio ($b = cte$), é possível comparar o termo que aparece na Eq. (198) devido à geração de calor com o lado direito da Eq. (157). Usou-se isso apenas a fim de verificar, já que para esse caso o método da reciprocidade dual é mais “caro”. Ao analisar os resultados verificou-se que estavam próximos uns dos outros, portanto não aparentou nenhuma evidência de erro de cálculo até a função *Monta_S_DRM.m*.
- II. **Teste de outras funções de aproximação:** Por estarmos usando uma função de aproximação muito simples foram testadas diversas funções de aproximação. Primeiro foi utilizado mais termos da Eq. (159), porém o erro persistiu. Então se tentou usar uma

função de aproximação com um polinômio, Eq. (163), adicionando o polinômio (164), mas infelizmente os erros continuaram, reduzindo as chances do erro se encontrar nas funções usadas na criação da matriz F.

- III. **Teste de outros métodos para a integração do tempo:** O uso de um método cuja aproximação é linear pode ser visto como uma possível fonte de erro. Então tentou-se usar o método de Runge-Kutta a partir da função *ode45*, mas mesmo assim o erro persistiu, portanto essa hipótese foi descartada.
- IV. **Testes com outras equações diferenciais:** Testou-se então implementar a equação de Helmholtz para verificar se os resultados apresentariam os mesmos erros. A equação de Helmholtz foi escolhida devido a proximidade das equações do método para problemas de difusão e de ondulatória. No programa 3D os erros obtidos foram maiores que no programa 2D, mas são erros aceitáveis.

A execução desses testes reduziu bastante os possíveis erros a se analisar, porém, principalmente o quarto teste realizado faz com que fiquemos sem saber onde melhorar o programa. A Referência [12] utiliza o mesmo método na construção de um programa transiente para transferência de calor, ela levanta a possibilidade dos erros estarem sendo causados pelo nível de discretização.

6 CONCLUSÕES

Muitos avanços foram feitos quanto à implementação, porém ainda é preciso algumas adições ao programa. Ao encontrar o problema no programa transiente, implementar as condições de contorno será exatamente igual o que foi implementado no programa permanente, fazendo pequenas alterações (principalmente quanto ao número de nós, já que agora calcula-se nos pontos internos).

Uma preocupação que surgiu foi o tempo de cada simulação, simulações com poucos elementos chegam a demorar horas para o caso permanente, para problemas transientes o tempo aumentará significativamente. As funções devem ser revisadas para serem otimizadas, algumas delas por terem sido feitas em um formato mais didático.

Existe alternativas para criar uma simulação transiente pelo método dos elementos de contorno, uma delas é a solução fundamental transiente. Caso o erro do método da reciprocidade dual persista essas outras opções devem ser estudadas, porém muitas dessas alternativas são mais complexas e poderão gerar programas mais pesados.

A partir do momento que o programa for concluído mais funções podem ser necessárias, porém com as ferramentas já disponíveis é possível rodar diversos casos relativamente próximos da realidade. Na Referência [13] existem simulações de soldagem 3D, utilizando o método das diferenças finitas, cujos parâmetros serão utilizados nas simulações com elementos de contorno.

Nem todos os objetivos foram alcançados, mas o avanço do trabalho foi grande. Além da criação de ferramentas para a simulação numérica, foi criada mais uma fonte de informações em português sobre o método para facilitar a difundir o assunto. Espera-se que venham outros trabalhos a fim de finalizar o programa, tendo essa dissertação como referência para facilitar suas elaborações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] SONG, Yong-Ak; PARK, Sehyung; CHOI, Doosun; JEE, Haesung.. **3D welding and milling: Part I- a direct approach for freeform fabrication of metallic prototypes.** International Journal of Machine Tools & Manufacture 45, 2005.
- [2] RIBEIRO, A. F. M.. **Automated off-line programming for rapid prototyping using gas metal arc welding.** PhD Thesis, Cranfield University, United Kingdom, 1995.
- [3] KANE, James H.. **Boundary elements analysis in engineering of continuum mechanics,** Editora Prentice Hall, New Jersey, 1994.
- [4] BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J.. **Boundary elements. An introductory course.** 2ª Edição, Computational Mechanics Publications, 1992.
- [5] BURDEN, Richard L.; FREITAS, J. Douglas. **Análise numérica.** 8ª Edição, Editora Cengage Learning, São Paulo, 2008.
- [6] BRAGA, Luciana M.. **Método dos elementos de contorno com múltiplos aplicados à problemas de condução de calor.** Faculdade de tecnologia, Universidade de Brasília, Brasil, 2012.
- [7] ÇENGEL, Yunus A.. **Transferência de calor e massa: uma abordagem prática.** 3ª Edição, Editora McGraw-Hill, São Paulo, 2009.
- [8] Francisco, S. C.; Raimundo, A. M.; Gaspar, A. M.; Quintela, D. A.. **Numerical evaluation of radiative heat exchanges between human beings and cooling radiant systems.** The changing context of comfort in an unpredictable world, Cumberland Lodge, Windsor, 2012
- [9] PATRIDGE, P.W.; BREBBIA, C. A.; WROBEL L. C.. **The dual reciprocity boundary element method.** Computational Mechanics Publications, Southamton, Boston, 1991.
- [10] CHENG, A. H-D; GRILLI, S; LAPE, O.. **Dual reciprocity boundary element based on complete set global shape functions.** WIT Press. Transactions on Modelling and Simulation vol 1, 1993.
- [11] PATRIDGE, P.W.; SENSALÉ, B. **Hybrid approximation functions in the dual reciprocity boundary element method.** Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol. 13, 1997.
- [12] Frayce, D; Khayat, RE; Dourdour, A.. **A dual reciprocity boundary element approach to three-dimensional transient heat conduction as applied to materials processing.** Numerical Heat Transfer Part A-Applications vol 29, 1996

- [13] FRAGA, Felipe F. **Transferência de calor aplicada à prototipagem rápida por deposição de metal em camadas sucessivas utilizando soldagem 3D**. Projeto de Graduação em Engenharia Mecânica, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasil, 2011.

ANEXOS

	Pág.
Anexo I	Prova dos fatores geométricos para um contorno suave
Anexo II	Programa <i>Pot_const3D.m</i>
Anexo III	Programa <i>Pot_const3D.m – Monta_GeH.m</i>
Anexo IV	Programa <i>Pot_const3D.m – solver.m</i>
Anexo V	Programa <i>Pot_const3D.m – f_aplica_CDC.m</i>
Anexo VI	Programa <i>Dif_const3D.m</i>
Anexo VII	Programa <i>Dif_const3D.m – Monta_GeH2.m</i>
Anexo VIII	Programa <i>Dif_const3D.m – Monta_S_DRM.m</i>
Anexo IX	Programa <i>Dif_const3D.m – gera_x_ini.m</i>
Anexo X	Programa <i>Dif_const3D.m – integra_tempo.m</i>

ANEXO I: Prova dos fatores geométricos para um contorno suave

A partir da Eq. (76) é perceptível que c vale 1 se o ponto a ser integrado estiver dentro do domínio Ω , e c vale 0 se este estiver fora do domínio. No caso onde o ponto fonte está no contorno existem três estratégias, onde duas delas são mais simples. Estas abordagens mais simples são: interno próximo ao contorno ($c = 1$) e externo próximo ao contorno ($c = 0$). Porém ao fazer isso aparecem novos problemas, um deles é que, no caso da abordagem próxima, mas interna, não se sabe a temperatura $T(d)$.

O terceiro caso é colocar uma hipersfera no contorno, passando ao redor do ponto fonte. Para isso, como mostra a Fig.38, aparece uma espécie de protuberância no contorno [6].

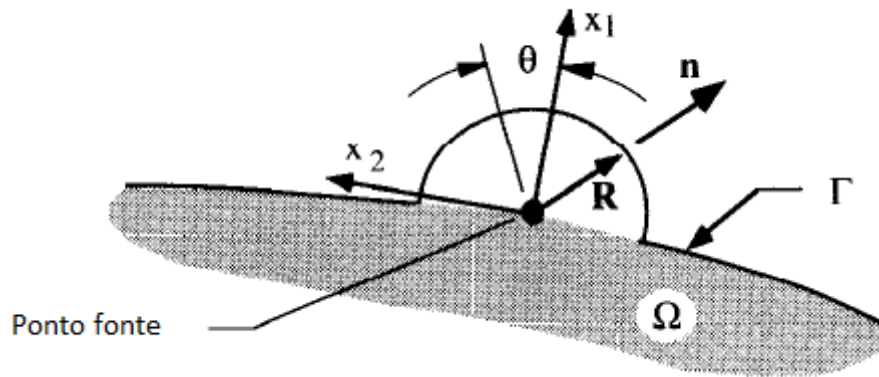


Figura 38. Hipersfera utilizada para o cálculo dos fatores geométricos [6]

Essa hipersfera é chamada de “bump”. Essa manipulação do contorno seria um problema para a formulação, porém se o raio tender a zero voltamos ao problema original. Para isso, a integração dos elementos de contorno é feita em duas etapas, do contorno sem o “bump”, e do “bump”.

$$T(d) = \int_{\Gamma-\text{bump}} Tq^* d\Gamma - \int_{\Gamma-\text{bump}} T^* q d\Gamma + \int_{\text{bump}} Tq^* d\Gamma - \int_{\text{bump}} T^* q d\Gamma \quad (199)$$

Resolvendo termo a termo:

$$\int_{\text{bump}} Tq^* d\Gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} T d\theta \quad (200)$$

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} T d\theta = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} T \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{T(d)}{2} \quad (201)$$

$$\int_{bump} T^* q d\Gamma = \ln(R) R \frac{-1}{2\pi k} \int_{\theta_1}^{\theta_2} q d\theta \quad (202)$$

$$\lim_{R \rightarrow 0} \ln(R) R \frac{-1}{2\pi k} \int_{\theta_1}^{\theta_2} q d\theta = -\frac{q(d)}{2k} \lim_{R \rightarrow 0} \ln(R) R = 0 \quad (203)$$

Portanto, substituindo esses valores na Eq. (199):

$$T(d) = \int_{\Gamma-bump} T q^* d\Gamma - \int_{\Gamma-bump} T^* q d\Gamma + \frac{T(d)}{2} - 0 \quad (204)$$

$$\frac{T(d)}{2} = \int_{\Gamma-bump} T q^* d\Gamma - \int_{\Gamma-bump} T^* q d\Gamma \quad (205)$$

Com isso prova-se que para o caso de um contorno suave, ou seja, $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$ e $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, temos que $c = 1/2$.

ANEXO II: Programa *Pot_const3D.m*

24/10/12 11:40 C:\Users\Rafael\Desktop\UnB\PG\Texto\CD\Pot_...\Pot_const3D.m 1 of 1

```
clc;
clear;
close all;

% Processa os dados para o cálculo -----
MALHA

% Monta todos os vetores e matrizes utilizados no cálculo -----
[VF,H, G, NOS, g] = monta_GeH(XYZ, ELEM, fc, k,cont_int,malha);

% Resolve as equações -----
[T,q,x]= solver(G,H,ELEM,CDC,g,VF,cont_int);

% Mostra o mapa de cor -----
map_cor(XYZ(:,1),XYZ(:,2),XYZ(:,3),ELEM,T)
```

ANEXO III: Programa *Pot_const3D.m – Monta_GeH.m*

24/10/12 11:56 C:\Users\Rafael\Desktop\UnB\PG\Texto\CD\Pot_co...\monta_GeH.m 1 of 2

```
function [VF,H, G, NOS, q] = monta_GeH(XYZ, ELEM, fc, k, cont_int,malha)

% Dados da integração numérica -----

npgns = 6; % Número de pontos de Gauss que serão usados na integração
% regular (não singular)
[qs11, w1] = Gauss_Legendre(-1., 1., npgns); % Pontos e pesos de Gauss para
% a integração regular

npgs = 8; % Número de pontos de Gauss que serão usados na integração
% regular

[qs12, w2] = Gauss_Legendre(-1., 1., npgs); % Pontos e pesos de Gauss para
% a integração singular

% Inicializa matrizes e pega dados para cálculos preliminares -----

n_elem = size(ELEM, 1); % Número de elementos
n_nos = n_elem; % Número de nós
H = zeros(n_nos, n_nos); % Inicializa a matriz H
G = zeros(n_nos, n_elem); % Inicializa a matriz G
q=zeros(n_nos,1); %Inicializa a matriz g
VF=zeros(n_nos+2, n_nos);

%verifica a existência de superfícies convexas
if cont_int==[0,0] %cont_int é determinado pela malha, quando a malha do
    fv=0;          %do cilindro é utilizada
else
    fv=1;
end

% Cálculo termo a termo das matrizes -----

for i = 1: n_nos % Corre os pontos fontes
    pontos_elem = ELEM(i, :); % Pontos que definem o elemento i (ao qual
    % o ponto fonte pertence)
    X = XYZ(pontos_elem, 1); % Coordenadas X dos pontos
    Y = XYZ(pontos_elem, 2); % Coordenadas Y dos pontos
    Z = XYZ(pontos_elem, 3); % Coordenadas Z dos pontos
    nnode = length(X); % Número de pontos do elemento
    xf = sum(X)/nnode; % Coordenada X do ponto fonte
    yf = sum(Y)/nnode; % Coordenada Y do ponto fonte
    zf = sum(Z)/nnode; % Corrdenada Z do ponto fonte
    NOS(i,:)=[i,xf,yf,zf];
    for j = 1: n_elem % Corre os elementos
        el=ELEM(j, :); % Pontos que definem o elemento j (elemento que
        % está sendo integrado)

        %encontra os fatores de visão para os elementos
        if fv==1
            if i>=cont_int(1,1) && i<=cont_int(1,2) && ...
                j>=cont_int(1,1) && j<=cont_int(1,2) && i~=j

                [figure1,figure2,figure3,figure4,nbpoint1,nbpoint2, ...
                nbpoint3,nbpoint4] = format_dad_VF(i,j,XYZ,ELEM,malha);
```

```

VF(i,j)=calc_VF (figure1,figure2,nbpoint1,nbpoint2);
VF(n_nos+1,i)=calc_VF (figure1,figure3,nbpoint1,nbpoint3);
VF(n_nos+2,i)=calc_VF (figure1,figure4,nbpoint1,nbpoint4);

    end
end

%calcula as matrizes G e H

if i == j % O ponto fonte pertence ao elemento que está sendo
    % integrado
    G(i, j) = calc_gsing(xf,yf,zf, XYZ, el, k, qsi2, w2);
    H(i, j) = -1/2;
else % O ponto fonte não pertence ao elemento que está sendo
    % integrado
    [G(i, j),H(i, j)]=calc_ghnsing(xf,yf,zf,XYZ, ...
        el,k,qsi1,w1);
    end
end

%encontra o vetor com a influência do ponto fonte

if fc(1,1)~=0
    q(i)=calc_q(xf,yf,zf,fc,k);
else
    q(i)=0;
end

end
return

```

ANEXO IV: Programa *Pot_const3D.m – solver.m*

24/10/12 23:18 C:\Users\Rafael\Desktop\UnB\PG\Texto\CD\Pot_const3D\solver.m 1 of 1

```
function [T,q,x]= solver(G,H,ELEM,CDC,g,VF,cont_int)

ncdc = length(CDC(:,1));
X0=zeros(ncdc,1); % cria uma estimativa inicial

% Resolve o sistema de equações (f_aplica_CDC) -----
x=fsolve(@(x)f_aplica_CDC(x,G,H,CDC,g,VF,cont_int),X0);

% Gera os vetores de temperatura e fluxo -----

[T,q]=Monta_Teq(CDC,ELEM,x);
```

ANEXO V: Programa *Pot_const3D.m – f_aplica_CDC.m*

24/10/12 23:19 C:\Users\Rafael\Desktop\UnB\PG\Texto\CD\Pot...\f_aplica_CDC.m 1 of 1

```
function f = f_aplica_CDC(x,G,H,CDC,g,VF,cont_int)
ncdc = length(CDC(:,1));

sigma=5.67*10^-8; %Constante de Stefan-Boltzmann
q=zeros(ncdc,1);
T=zeros(ncdc,1);
for i=1:ncdc;
    if CDC(i,2)==0 %Temperatura conhecida
        q(i,1)=x(i);
        T(i,1)=CDC(i,1);

    elseif CDC(i,2)==1 %Fluxo conhecido
        q(i,1)=CDC(i,1);
        T(i,1)=x(i);

    elseif CDC(i,2)==2 %Convecção
        h=CDC(i,4);
        T_inf=CDC(i,1);
        T(i,1)=x(i);
        q(i,1)=h*(T_inf-x(i));

    elseif CDC(i,2)==3 %Radiação
        e=CDC(i,4);
        T_inf=CDC(i,1);
        T(i,1)=x(i);
        if cont_int==[0,0]
            q(i,1)=e*sigma*(x(i)^4-T_inf^4);
        else %caso necessite dos fatores de visão
            q(i,1)=0;
            contador=length(VF(:,1))-2;
            for ii=1:1:contador
                q(i,1)=q(i,1)+e*sigma*VF(ii,i)*(x(i)^4-T(ii,1)^4);
            end
            q(i,1)=q(i,1)+e*sigma*(VF(end-1,i)*(x(i)^4-T_inf^4) ...
                +VF(end,i)*(x(i)^4-T_inf^4));
        end
    end
end
end

f=H*T-G*q+g; %Sistema de equações a se resolver
```

ANEXO VI: Programa *Dif_const3D.m*

24/10/12 23:56 C:\Users\Rafael\Desktop\UnB\PG\Texto\CD\Dif...\Dif_const3D.m 1 of 1

```
clc;
clear;
figure

% Processa os dados para o cálculo -----
MALHA % Arquivo de entrada de dados

% Monta algumas das matrizes e vetores usados no cálculo -----
[VF,H, G, NOS,g] = monta_GeH2(XYZ, ELEM, fc, k, cont_int,malha,P_INT);

% Monta as matrizes S e F do DRM -----
[S,F]=Monta_S_DRM2(ELEM,NOS,XYZ,P_INT,H,G,k);

npint = size(P_INT(:,1));
C = -1/k*S*inv(F);
nlinC=size(C,1); % Número de linhas da matriz C.
C=C(:,1:nlinC); % Garante que a matriz C seja quadrada (número de linhas é
                % igual ao número de colunas.

% Monta a matriz A e o vetor x para a solução do sistema -----
[mataA, B] = aplica_cdc(H, G, CDC);

to=0; % Tempo inicial da análise
tspan=[to tf]; % Intervalo de tempo da análise

% Realiza as integrais no tempo -----
x_ini=gera_x_ini(CDC,ELEM,Tinicial,npint); % Gera o vetor x_ini que
% corresponde aos valores iniciais do vetor x.
% O valor x_ini de um nó i é igual à temperatura inicial Tinicial
% se o fluxo for conhecido neste nó e igual ao valor da condição de
% contorno se a temperatura for conhecida neste nó. Para os elementos de x
% correspondentes aos pontos internos, os elementos de x_ini são iguais
% ao valor de Tinicial

[Tempo X] = ode45(@(t,x) integra_tempo(t,x,CDC,ELEM,H,G,mataA,B,C), ...
    tspan,x_ini);

% Plota as temperaturas do nó central -----
figure
plot(Tempo,X(:,110),'ro-')
```

ANEXO VII: Programa *Dif_const3D.m – Monta_GeH2.m*

25/10/12 00:04 C:\Users\Rafael\Desktop\UnB\PG\Texto\CD\Dif_C...\monta_GeH2.m 1 of 2

```
function [VF,H, G, NOS, q] = monta_GeH(XYZ, ELEM, fc, k, cont_int,malha,P_INT)

% Dados da integração numérica -----

npgns = 6; % Número de pontos de Gauss que serão usados na integração
% regular (não singular)
[qs1, w1] = Gauss_Legendre(-1., 1., npgns); % Pontos e pesos de Gauss para
% a integração regular

npgs = 8; % Número de pontos de Gauss que serão usados na integração
% regular

[qs2, w2] = Gauss_Legendre(-1., 1., npgs); % Pontos e pesos de Gauss para
% a integração singular

% Inicializa matrizes e pega dados para cálculos preliminares -----

n_elem = size(ELEM, 1); % Número de elementos
n_pint = size(P_INT,1); %Número de pontos internos
n_nos = n_elem + n_pint; % Número de nós
H = zeros(n_nos, n_nos); % Inicializa a matriz H
G = zeros(n_nos, n_elem); % Inicializa a matriz G
q=zeros(n_nos,1); %Inicializa a matriz q
g=zeros(n_nos,1); %Inicializa a matriz g
VF=zeros(n_nos+2, n_nos);

%verifica a existência de superfícies convexas
if cont_int==[0,0] %cont_int é determinado pela malha, quando a malha do
    fv=0;          %do cilindro é utilizada
else
    fv=1;
end

% Cálculo termo a termo das matrizes -----

for i = 1: n_nos % Corre os pontos fontes
    if (i <= n_elem)

        pontos_elem = ELEM(i, :); % Pontos que definem o elemento i (ao
        % qual o ponto fonte pertence)
        X = XYZ(pontos_elem, 1);% Coordenadas X dos pontos
        Y = XYZ(pontos_elem, 2);% Coordenadas Y dos pontos
        Z = XYZ(pontos_elem, 3);% Coordenadas Z dos pontos
        nnode = length(X); % Número de pontos do elemento
        xf = sum(X)/nnode; % Coordenada X do ponto fonte
        yf = sum(Y)/nnode; % Coordenada Y do ponto fonte
        zf = sum(Z)/nnode; % Corrdenada Z do ponto fonte
    else
        xf = P_INT (i - n_elem,2);
        yf = P_INT (i - n_elem,3);
        zf = P_INT (i - n_elem,4);
    end
    NOS(i,:)=[i,xf,yf,zf];
    for j = 1: n_elem % Corre os elementos
        el=ELEM(j, :); % Pontos que definem o elemento j (elemento que
```



```

    % está sendo integrado)

%encontra os fatores de visão para os elementos
if fv==1
    if i>=cont_int(1,1) && i<=cont_int(1,2) && ...
        j>=cont_int(1,1) && j<=cont_int(1,2) && i~=j

        [figure1,figure2,figure3,figure4,nbpoint1,nbpoint2, ...
         nbpoint3,nbpoint4] = format_dad_VF(i,j,XYZ,ELEM,malha);

        VF(i,j)=calc_VF(figure1,figure2,nbpoint1,nbpoint2);
        VF(n_nos+1,i)=calc_VF(figure1,figure3,nbpoint1,nbpoint3);
        VF(n_nos+2,i)=calc_VF(figure1,figure4,nbpoint1,nbpoint4);

    end
end

%calcula as matrizes G e H

if i == j % O ponto fonte pertence ao elemento que está sendo
    % integrado
    G(i, j) = calc_gsing(xf,yf,zf, XYZ, el, k, qsi2, w2);
    H(i, j) = -1/2;
else % O ponto fonte não pertence ao elemento que está sendo
    % integrado
    [G(i, j),H(i, j)]=calc_ghnsing(xf,yf,zf,XYZ, ...
        el,k,qsil,w1);

    end
end
% g(i)=calc_g(qsil,w1,xf,yf,zf);

%encontra o vetor com a influência do ponto fonte

if fc(1,1)~=0
    q(i)=calc_q(xf,yf,zf,fc,k);
else
    q(i)=0;
end
end

% Calculo dos termos da diagonal da matriz H (consideração de corpo a
% temperatura constante)
H(n_elem+1:end,n_elem+1:end)=-eye(n_pint);
for m = 1 : n_nos
    H(m,m) = 0; %zera a diagonal principal
    for n = 1 : n_nos
        if n ~= m
            H(m,m) = H(m,m) - H(m,n);
        end;
    end;
end;
end;
return

```

ANEXO VIII: Programa *Dif_const3D.m – Monta_S_DRM.m*

25/10/12 19:42 C:\Users\Rafael\Desktop\UnB\PG\Texto\CD\Dif...\Monta_S_DRM2.m 1 of 2

```
function [S,F]=Monta_S_DRM2(ELEM,NOS,XYZ,P_INT,H,G,k)

n_nos = length(NOS(:,1));
if isempty(P_INT)
    n_noi=0;
else
    n_noi=length(P_INT(:,1)); % Number of internal nodes
end

n_pontos = n_nos;
drm_nodes = NOS(:,1:4);

if(n_noi~=0)
    drm_nodes(n_nos+1:n_nos+n_noi,:) = P_INT;
end
n_drm_nodes=length(drm_nodes(:,1));
drm_nodes(n_nos+1:n_drm_nodes,1)=(n_nos+1:n_drm_nodes)';

% Cálculo da matriz [F] -----

for i = 1 : n_pontos
    xi = drm_nodes(i,2);
    yi = drm_nodes(i,3);
    zi = drm_nodes(i,4);
    body(i) = 1;
    for j = 1 : n_pontos
        xj = drm_nodes(j,2);
        yj = drm_nodes(j,3);
        zj = drm_nodes(j,4);
        r = sqrt((xi-xj)^2+(yi-yj)^2+(zi-zj)^2);
        F(i,j)=1+r;
    end
end
n_el = length(ELEM(:,1)); % N. total de elementos

% Cálculo da matriz Q_chap e T_chap -----

for i = 1 : n_pontos
    xr = drm_nodes(i,2);
    yr = drm_nodes(i,3);
    zr = drm_nodes(i,4);
    for j=1:n_pontos
        x_f = drm_nodes(j,2);
        y_f = drm_nodes(j,3);
        z_f = drm_nodes(j,4);
        r=sqrt((x_f-xr)^2+(y_f-yr)^2+(z_f-zr)^2);
        T_chap = r^2/6 + r^3/12;
        TC(j,i) = T_chap;
    end

    pontos_elem = ELEM(j, :); % Pontos que definem o elemento j (ao
    % qual o ponto fonte pertence)
    x_f = NOS(j, 2); % Coordenada X do ponto fonte
    y_f = NOS(j, 3); % Coordenada Y do ponto fonte
    z_f = NOS(j, 4); % Corrdenada Z do ponto fonte
```

```

[n] = calc_vetnormal(XYZ,pontos_elem);
nx = n(1);
ny = n(2);
nz = n(3);

r=sqrt((x_f-xr)^2+(y_f-yr)^2+(z_f-zr)^2);
q_chap = (4 + 3*r)/12*((xr-x_f)*nx+(yr-y_f)*ny+(zr-z_f)*nz);
QC(j,i) = q_chap;
end
end
% Cálculo da matriz S -----

S=(H*TC-G*QC);
%res=S*inv(F)*body';

```

ANEXO IX: Programa *Dif_const3D.m* – *gera_x_ini.m*

25/10/12 00:05 C:\Users\Rafael\Desktop\UnB\PG\Texto\CD\Dif_C...\gera_x_ini.m 1 of 1

```
function x=gera_x_ini(CDC,ELEM,Tinicial,n_pint)
% Aplica as condições de contorno

nelem=length(ELEM(:,1)); % Número de elementos
n_nos=nelem;
ntotal=n_nos+n_pint;
x=Tinicial*ones(ntotal,1);

for el = 1:nelem % Corre os elementos
    tipoCDC=CDC(el,1); % Tipo da condição de contorno no elemento ij
    if tipoCDC==0 % Temperatura conhecida=>O fluxo é zero
        x(el)=0; % Atribui os valores
        % das condições de contorno ao vetor x
    end
end
end
```

ANEXO X: Programa *Dif_const3D.m – integra_tempo.m*

25/10/12 00:06 C:\Users\Rafael\Desktop\UnB\PG\Texto\CD\Di...\integra_tempo.m 1 of 1

```
function [dTdt,x] = integra_tempo(t,x,CDC,ELEM,H,G,matA,B,C)

[T,q]=Monta_Teq(CDC,ELEM,x); % Monta os vetores T e q
dTdt=inv(C)*(G*q-H*T);
g=C*dTdt;
b=B*q;
x=matA\b-g; % Calcula as variáveis desconhecidas

return
```